Begründung der Metaphysik durch logische Analyse der Selbstbezüglichkeit

Uwe Petersen

Zusammenfassung. Denken, das auszog, sich seiner eigenen Grundlagen zu versichern, fand sich wieder in einem heillosen Widerstreit seiner Einsichten. So erklärte es sich selbst zu diesem Behufe ungeeignet, nicht ahnend, daß es eben in diesem Widerstreit auf sich selbst und seine ureigene konstitutive Kraft gestoßen war. Dieser Situation der Selbstbezüglichkeit soll hier durch eine nicht-klassische Logik Rechnung getragen werden, um für eine Form der spekulativen Erkenntnis Raum zu schaffen: ein Wissen, das seinen Grund nicht in der äußeren Welt hat, sondern in einer kognitiven Rückwendung auf sich selbst, auf seine eigene Begrifflichkeit. Dazu werden Techniken und Methoden aus der mathematischen Logik und Grundlagenforschung herangezogen, wo Selbstbezüglichkeit schon seit langem eine wichtige Rolle spielt.

Was der Geist will, ist,
seinen eigenen Begriff zu erreichen,
aber er selbst verdeckt sich denselben ...[1]

It's the self-reference, stupid.[2]

1. Einleitung

Vor rund 75 Jahren hat Rudolf Carnap in einem Aufsatz mit dem Titel „Widerlegung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache“[3] zu einem Schlag ausgeholt, der die Metaphysik ein für allemal aus dem Kreis der Wissenschaften verbannen sollte. Die damals noch relativ junge Disziplin der symbolischen Logik war auserkoren, dafür die Mittel zu liefern:

[1] [28], S. 90 f. Es geht weiter: „ist stolz und voll von Genuß, in dieser Entfremdung seiner selbst.“

[2] Ich, dieser Band, S. 77; frei nach Bill Clinton.

[3] Kann man im 21. Jahrhundert noch davon ausgehen, daß Carnaps Aufsatz [6], zumindest dem Titel nach, bekannt ist? Wenn nicht, so hat wohl der Titel dieses Aufsatzes seinen Sinn verfehlt.

DILEMMATA: Jahrbuch der ASFPG **2** (2007), 77–169.

> Durch die Entwicklung der *modernen Logik* ist es möglich geworden, auf die Frage nach der Gültigkeit und Berechtigung der Metaphysik eine neue und schärfere Antwort zu geben. Die Untersuchungen der „angewandten Logik“ oder „Erkenntnistheorie“, die sich die Aufgabe stellen, durch logische Analyse den Erkenntnisgehalt der wissenschaftlichen Sätze und damit die Bedeutung der in den Sätzen auftretenden Wörter („Begriffe“) klarzustellen, führen zu einem positiven und zu einem negativen Ergebnis. Das positive Ergebnis wird auf dem Gebiet der empirischen Wissenschaft erarbeitet; die einzelnen Begriffe der verschiedenen Wissenschaftszweige werden geklärt; ihr formal-logischer und erkenntnistheoretischer Zusammenhang wird aufgewiesen. Auf dem Gebiet der *Metaphysik* (einschließlich aller Wertphilosophie und Normwissenschaft) führt die logische Analyse zu dem Ergebnis, daß *die vorgeblichen Sätze dieses Gebietes gänzlich sinnlos sind.* Damit ist eine radikale Überwindung der Metaphysik erreicht, die von den früheren antimetaphysischen Standpunkten aus noch nicht möglich war.[4]

„Sinnlos“ wird dabei von Carnap folgendermaßen näher bestimmt:

> Im strengen Sinn *sinnlos* ist ⟦...⟧ eine Wortreihe, die innerhalb einer bestimmten, vorgegebenen Sprache gar keinen Satz bildet.[5]

Damit läßt sich nun der Titel von Carnaps Aufsatz wie folgt modifizieren: „Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse ihrer Sätze (Wortreihen) innerhalb einer bestimmten vorgegebenen Sprache“.

Aber dann ergibt sich sofort die Frage: Was ist mit anderen, nicht vorgegebenen Sprachen? Und weiter: Wer gibt überhaupt die Sprache vor, und aufgrund welcher Autorität? Reicht es aus, eine bestimmte Sprache zu finden, in der metaphysische Sätze ungrammatikalisch sind? Ist es nicht nötig, den Reichtum der möglichen Sprachen in Betracht zu ziehen?

Das wird uns noch etwas weiter unten beschäftigen. Vorher aber will ich auf die Sprache eingehen, die Carnap bei seinem Kriterium der Sinnlosigkeit im Auge hatte.

Carnap greift auf eine machtvolle Entwicklung der Logik seit der Mitte des 19. Jahrhunderts zurück, die außer ihrer intendierten Anwendung

[4] [6], S. 219 f.
[5] Ebd., S. 220.

auch ein bemerkenswertes, und für die herkömmliche Auffassung keineswegs willkommenes, Resultat hatte. Nachdem Frege die Logik zu einem funktionstüchtigen Werkzeug ausgebaut und für eine logische Grundlegung der Arithmetik eingesetzt hatte, entdeckte Russell, daß sich damit nicht nur arithmetische Wahrheiten beweisen lassen, sondern auch Widersprüche. Sein Rezept zur Vermeidung solcher beweisbaren Widersprüche war eine Unterscheidung von Typen,[6] die dann als „einfache Typentheorie" in die Geschichte eingegangen ist. In der Sprache dieser Typentheorie hat man Zeichen für Variablen verschiedener Typen zur Verfügung, und das Zeichen für die Elementschaftsrelation kann nur zwischen Zeichen für Variablen bestimmter Typen stehen, wobei insbesondere ausgeschlossen ist, daß Zeichen für Variablen desselben Typs auf beiden Seiten der Elementschaftsrelation zu stehen kommen. Mit anderen Worten, die Sprache ist so aufgebaut, daß unmittelbar an der Syntax erkennbar ist, ob eine Zeichenreihe ein Satz dieser Sprache ist oder nicht.

Eine solche Typenunterscheidung dient Carnap als Vorbild für seine Auffassung von sinnlosen Sätzen. In vager Analogie dazu führt er erst „Sphärenunterscheidungen" ein, was ihm dann erlaubt, unliebsame Sätze als „Sphärenvermengungen" zu brandmarken:

> Die Nichtbeachtung des Unterschiedes sphärenfremder Begriffe bezeichnen wir als „Sphärenvermengung".[7]

Sphärenvermengungen sind nach Carnap die Ursache sinnloser Sätze. Unter der Überschrift „Literatur" führt Carnap dann weiter aus:

> Eine ausdrückliche Beachtung hat die genannte Art der Mehrdeutigkeit bisher in der Logik nicht gefunden. Sie hat aber eine gewisse Verwandtschaft mit der Vielheit der „Suppositionen" eines Wortes, die die Scholastiker zu unterscheiden pflegten ⟦...⟧. Enger hängt sie jedoch mit der Typentheorie zusammen, die Russell zur Überwindung der logischen Paradoxien aufgestellt und in seinem System der Logistik zur Anwendung gebracht hat ⟦...⟧. Russell hat jedoch diese Theorie nur auf formal-logische Gebilde angewendet, nicht auf ein System der konkreten Begriffe (d. h. genauer: nur auf Variable und logische Konstanten, nicht auf nichtlogische Konstanten). Unsere „Gegenstandssphären" sind

[6] Vgl. [46], Appendix B. Unten auf S. 107 findet sich ein kurzes Zitat zur Charakterisierung der Typentheorie in Russells eigenen Worten.

[7] [5], S. 40.

> die Russellschen „Typen“, angewendet auf nichtlogische Begriffe. Somit liegt auch die Rechtfertigung unserer Unterscheidung der Gegenstandssphären ⟦. . .⟧ in der Typentheorie⟦.⟧[8]

Das erlaubt nun eine weitere Modifizierung des Titels von Carnaps Aufsatz: „Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse ihrer Sätze (Wortreihen) innerhalb einer bestimmten vorgegebenen Sprache welche eine Sphärenvermengung ausschließt“.

Was hat man sich nun unter einer „Sphärenvermengung“ konkret vorzustellen? Anders gesagt, was sind die Russellschen „Typen“, „angewendet auf nichtlogische Begriffe“? Carnap gibt folgendes Beispiel:

> ⟦D⟧ie Wortreihe ⟦„Caesar ist eine Primzahl“ ist⟧ syntaxgemäß gebildet, ⟦. . .⟧ ist aber trotzdem sinnlos. „Primzahl“ ist eine Eigenschaft von Zahlen; sie kann einer Person weder zu- noch abgesprochen werden. Da ⟦diese Wortreihe⟧ aussieht wie ein Satz, aber kein Satz ist, nichts besagt, weder einen bestehenden noch einen nicht bestehenden Sachverhalt zum Ausdruck bringt, so nennen wir diese Wortreihe einen „Scheinsatz“.[9]

Aus Carnaps Sicht

> wird hier ein Prädikat zwar als Prädikat verwendet, aber als Prädikat einer anderen „Sphäre“: es liegt eine Verletzung der Regeln der sog. „Typentheorie“ vor. ⟦. . .⟧ Personennamen und Zahlwörter gehören zu verschiedenen logischen Sphären, und daher auch Personenprädikate (z. B. „Feldherr“) und Zahlenprädikate („Primzahl“).[10]

Und wie erkennt man, daß „Caesar“ und „Primzahl“ zu verschiedenen logischen Sphären gehören? An der Syntax erkennt man es jedenfalls nicht, und daß ein Satz wie „Caesar ist keine Primzahl“ zu Widersprüchen führen würde, zeigt Carnap auch nicht.[11] Da muß man eben das richtige Sprach-

[8] Ebd.

[9] [6], S. 227 f.

[10] Ebd., S. 235.

[11] In seinen *Grundlagen der Arithmetik* (§ 56) formuliert es Frege als Mangel einer Festlegung nach dem Muster, „einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn kein Gegenstand unter ihn fällt“, daß wir durch sie nie entscheiden können, „ob einem Begriffe die Zahl J u l i u s C a e s a r zukomme, ob dieser bekannte Eroberer Galliens eine Zahl ist oder nicht.“ Deshalb hat Frege Begriffsumfänge eingeführt: Sie erlauben es ihm, Zahlen *dingfest* zu machen. Von „Sinnlosigkeit“ ist bei Frege jedoch keine Rede.

verständnis haben. Carnap hat das natürlich, bzw. bildet sich ein es zu haben, so wie es sich für einen Philosophen gehört. Es ist das inhaltliche Wissen, das die Philosophie prägt und sie so überlegen macht. Aber mit der Russellschen Typentheorie hat das, über eine vage Analogie hinaus, nichts mehr zu tun. Deshalb werde ich Carnaps Idee einer Sphärenunterscheidung keine weitere Beachtung schenken und durch das Konzept der Typenunterscheidung ersetzen, das Carnap ohnehin als Rechtfertigung für seine Unterscheidung der Gegenstandssphären anführt. Wenn ich also im folgenden Carnap zitiere, so sollte „Scheinsatz" im Sinne von „Wortreihe mit Typenvermengungen" gelesen werden, um die stärkste mögliche Lesart zu erhalten.

> Wenn unsere These, daß die Sätze der Metaphysik Scheinsätze sind, zu recht besteht, so würde also in einer logisch korrekt aufgebauten Sprache die Metaphysik gar nicht ausgedrückt werden können. Daraus ergibt sich die große philosophische Bedeutsamkeit der Aufgabe des Aufbaus einer logischen Syntax⟦.⟧[11]

Worauf es mir hier vor allem ankommt, ist eine gewisse Unklarheit in der Formulierung: „⟦I⟧n einer logisch korrekt aufgebauten Sprache ⟦kann⟧ die Metaphysik gar nicht ausgedrückt werden". Das kann auf zwei Arten gelesen werden:

— Es gibt eine logisch korrekt aufgebaute Sprache, in der die Metaphysik nicht ausgedrückt werden kann.
— Es gibt keine logisch korrekt aufgebaute Sprache, in der die Metaphysik ausgedrückt werden kann.

Es kommt darauf an, mit welcher Betonung man den Satz liest. Was Carnap tatsächlich — ansatzweise zumindest — in Angriff nimmt, ist die erste Variante, der Aufbau einer logischen Syntax. Es scheint mir aber klar, daß Carnaps Anspruch auf die zweite Variante abzielt, die auch einfach folgendermaßen formuliert werden kann:

— Wenn eine Sprache logisch korrekt aufgebaut ist, dann kann die Metaphysik nicht in ihr ausgedrückt werden.

Dazu muß aber präzisiert werden, was überhaupt als „logisch korrekt aufgebaute Sprache" gelten kann. Die Aufgabe einer solchen Präzisierung formuliert Carnap jedoch nicht. Das scheint für Carnap nicht zum Anliegen einer *logischen Analyse* zu gehören. Hier eröffnet sich aber ein grundsätzliches Problem für jeden Versuch einer *Überwindung*, ein Problem, das sich für den Versuch einer *Begründung* nicht stellt. Eine Überwindung der Metaphysik nach dem Carnapschen Muster erfordert ein Quantifizieren über alle logisch korrekt aufgebauten Sprachen.[12] Für eine *Begründung* würde es ausreichen, eine nach allgemeinen Maßstäben *logisch korrekt aufgebaute Sprache* zu finden, bzw. aufzubauen, in der sich Metaphysik betreiben läßt, um Carnaps Schlag abgewehrt zu haben. Das ist es, worum es hier geht.

Insoweit Carnap glaubt, in metaphysischen Aussagen eine Sphärenvermengung entdecken zu können, mag er ja durchaus etwas Richtiges getroffen haben. Aber eine Sphärenvermengung auf der Grundlage der Typentheorie als ungrammatikalisch zu verwerfen, ist solange zu billig, als die Typentheorie nicht als einzig sinnvolle Logik nachgewiesen worden ist. Das war wohl auch Carnap klar, und so finden wir folgende Bemerkung:

> Die Typentheorie ist zwar nicht allgemein anerkannt, aber es ist bisher keinem ihrer Gegner gelungen, ein logisches System aufzuweisen, das ohne Verwendung einer Typentheorie imstande wäre, die Widersprüche (die sog. „Paradoxien“), an denen die alte Logik krankt, zu vermeiden.[13]

Es mag ja sein, daß 1928 niemand in der Lage war, der Typentheorie ein logisches System entgegenzusetzen, das ohne Typenunterscheidung imstande war, die Paradoxien zu vermeiden. Aber schon zwei Jahre später hat Łukasiewicz seinen unendlichwertigen Aussagenkalkül vorgestellt, in dem die logischen Paradoxien zwar formuliert werden können, aber nicht mehr zu beweisbaren kontradiktorischen Widersprüchen führen.[14] Sollte Carnap wirklich geglaubt haben, die (einfache) Typentheorie stelle das letzte

[12] Das läßt sich durchaus mit dem Problem der Entscheidbarkeit (von Theorien) vergleichen: der Begriff des Entscheidungsverfahrens (Algorithmus) muß präzise gefaßt sein, um beweisen zu können, daß eine Theorie unentscheidbar ist. Das erfordert ein Quantifizieren über alle Entscheidungsverfahren. Im Falle der Entscheidbarkeit von Theorien wird das bekanntlich über den Begriff der allgemein-rekursiven Funktion (oder einen äquivalenten Begriff) und die Church-Turing-These erreicht. Das bedeutet jedoch nicht, daß man schon die Church-Turing-These braucht, um spezielle Algorithmen durch rekursive Funktionen zu erfassen.

[13] [5], S. 40.

[14] Vgl. [33]. Weitere Systeme dieser Art sind im Laufe der vierziger und fünfziger Jahre des letzten Jahrhunderts von Fitch, Ackermann und Schütte entwickelt worden. Literaturhinweise finden sich unter 78.15 in [37], S. 1099.

Wort in Sachen Paradoxienvermeidung dar? Wie auch immer, Carnap hat seinen Versuch einer Überwindung der Metaphysik von der Notwendigkeit einer Typenunterscheidung à la Russell zur Vermeidung der logischen Paradoxien abhängig gemacht und damit implizit eine Richtung gewiesen, in der Metaphysik sinnvoll betrieben werden kann: als Theorie jener Begriffsbildungen, die unter klassischen Bedingungen zu beweisbaren Widersprüchen führen. Die Widersprüche, an denen, in Carnaps Worten, „die alte Logik krankt“, stellen ein tief wurzelndes Problem begrifflichen Denkens dar, das nicht nur der Fragestellung der Metaphysik zugrundeliegt, sondern dem Carnap mit seinem Versuch einer Überwindung der Metaphysik selbst nicht entrinnen konnte.

Eine Form dieses Problems zeigt sich im sogenannten *Ad-hominem*-Argument, das die Praxis des Sprechers an dessen eigenen Ansprüchen mißt.[15] Carnap scheut sich nicht, diese Frage zu stellen:

> But now it may perhaps be objected: “How about your own propositions? In consequence of your view your own writings, including this book, would be without sense, for they are neither mathematical nor empirical, that is verifiable by experience.” What answer can be given to this objection? This question is decisive for the consistency of the view which has been explained here.[16]

Das ist tatsächlich eine Frage, von deren Beantwortung die Glaubwürdigkeit von Carnaps Ansatz zur Überwindung der Metaphysik abhängt. Zunächst einmal beantwortet Carnap diese Frage nicht selbst, sondern schiebt Wittgenstein vor:

> An answer to the objection is given by Wittgenstein in his book *Tractatus Logico-Philosophicus.* This author has developed most radically the view that the propositions of metaphysics are shown by logical analysis to be without sense. How does he reply to the criticism that in that case his own propositions are also without sense? He replies by agreeing with it. He writes: “*The result of philosophy is not a number* of ‘philosophical propositions,’ but to make propositions clear” (S. 77). “My propositions are elucidatory in this way: he who understands me finally recog-

[15] Vgl. [12], S. 68.
[16] [7], S. 36.

> nizes them as senseless, when he has climbed out through them, on them, over them. (He must so to speak throw away the ladder after he has climbed up on it.) He must surmount these propositions; then he sees the world rightly. Whereof one cannot speak, thereof one must be silent." (S. 189).[17]

Worauf es mir hier ankommt, ist der Dreh mit dem „Resultat“: Die Philosophie hat ein Resultat, und zu dem kommt man nur, wenn man vergißt, wie man dahin gekommen ist. Mit anderen Worten, was Wittgenstein als Philosophie propagiert, ist eine Form der Einsicht, die mit ihrem eigenen Werdegang auf Kriegsfuß steht. Was macht nun Carnap daraus?

> I, as well as my friends in the Vienna Circle, owe much to Wittgenstein, especially as to the analysis of metaphysics. But on the point just mentioned I cannot agree with him. In the first place he seems to me to be inconsistent in what he does. He tells us that one cannot state philosophical propositions and that whereof one cannot speak, thereof one must be silent; and then instead of keeping silent, he writes a whole philosophical book. Secondly, I do not agree with his assertion that all his propositions are quite as much without sense as metaphysical propositions are. My opinion is that a great number of his propositions (unfortunately not all of them) have in fact sense; and that the same is true for all propositions of logical analysis.[18]

Haben wir eine Antwort erhalten, oder sind wir nur an der Nase herumgeführt worden? Carnap scheint sehr wohl zu sehen, daß Wittgenstein sich in einer Art von „performative inconsistency“ verfangen hat, doch erfahren wir lediglich was er davon hält — ohne irgendeine logische Analyse. Dafür verspricht er

[17] Ebd., S. 37. Carnaps Seitenangaben beziehen sich auf die erste englische Übersetzung von Wittgensteins Tractatus von 1922. Das erste Wittgenstein-Zitat lautet im (deutschen) Original: „Das Resultat der Philosophie sind nicht ‚philosophische Sätze‘, sondern das Klarwerden von Sätzen.“ ([63], S. 48); das zweite: „Meine Sätze erläutern dadurch, daß sie der, welcher mich versteht, am Ende als unsinning erkennt, wenn er durch sie — auf ihnen — über sie hinausgestiegen ist. (Er muß sozusagen die Leiter wegwerfen, nachdem er auf ihr hinaufgestiegen ist.) Er muß diese Sätze überwinden, dann sieht er die Welt richtig. Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen.“ ([63], S. 150).

[18] [7], S. 37 f.

> to show a way of formulating the results of logical analysis, a way not exposed to the objection mentioned, and thus to exhibit an *exact method of philosophy.*

Im Rückblick wissen wir, daß Carnap dieses Versprechen nicht hat einlösen können. Aber das ist eine andere Geschichte. Was mich hier interessiert, ist eine gewisse Unverträglichkeit von Reden und Tun, Rhetorik und Praxis, wenn man so will. Deshalb füge ich hier noch ein Zitat aus Russells Vorwort zur englischen Übersetzung von Wittgensteins *Tractatus* an, in dem Russell ebenfalls auf Wittgensteins Inkonsequenz zu sprechen kommt:

> Mr Wittgenstein's attitude towards the mystical ⟦...⟧ grows naturally out of his doctrine in pure logic, according to which the logical proposition is a picture (true or false) of the fact, and has in common with the fact a certain structure. It is this common structure which makes it capable of being a picture of the fact, but the structure cannot itself be put into words, since it is a structure *of* words, as well as of the facts to which they refer. Everything, therefore, which is involved in the very idea of the expressiveness of language must remain incapable of being expressed in language, and is, therefore, inexpressible in a perfectly precise sense. This inexpressible contains, according to Mr Wittgenstein, the whole of logic and philosophy. The right method of teaching philosophy, he says, would be to confine oneself to propositions of the sciences, stated with all possible clearness and exactness, leaving philosophical assertions to the learner, and proving to him, whenever he made them, that they are meaningless. It is true that the fate of Socrates might befall a man who attempted this method of teaching, but we are not to be deterred by that fear, if it is the only right method. It is not this that causes some hesitation in accepting Mr Wittgenstein's position, in spite of the very powerful arguments which he brings to its support. What causes hesitation is the fact that, after all, Mr Wittgenstein manages to say a good deal about what cannot be said, thus suggesting to the sceptical reader that possibly there may be some loophole through a hierarchy of languages, or by some other exit.[19]

[19] [48], p. xx f.

In alldem zeigt sich ein Problem — ein Problem mit der Sprache, angesichts eines Inhaltes, der sich nur um den Preis der Inkonsistenz ausdrücken läßt.

Für den Fall der Russellschen Typentheorie hat Fitch das folgendermaßen formuliert:

> a ramified theory of types could not even be stated. Its sweeping restrictions against self-reference would apply to every theory, including itself, and so would be self-referential in violation of its own edicts. A similar criticism can be made even against the more moderate simplified theory of types, if regarded as universally applicable.[20]

Anders gesagt, beim Versuch, ein Kriterium der Sinnlosigkeit von metaphysischen Sätzen aufzustellen, ist Carnap ein Opfer jener Grammatikfehler geworden, die er ausschließen wollte.

Mit einem einfachen Slogan könnte man das folgendermaßen fassen:

Die Formulierung eines Kriteriums zur Überwindung der Metaphysik ist ein Teil derselben.

Das wird Metaphysikgegner jedoch nicht davon abbringen, weiterhin die Unmöglichkeit jeglicher Metaphysik zu behaupten, denn

> in Wirklichkeit liegt die Sache so, daß es keine sinnvollen metaphysischen Sätze geben kann. Das folgt aus der Aufgabe, die die Metaphysik sich stellt: sie will eine Erkenntnis finden und darstellen, die der empirischen Wissenschaft nicht zugänglich ist.[21]

Wenn es natürlich „in Wirklichkeit“ so ist, dann kann dagegen auch ein logisches Argument nichts ausrichten.[22] Deshalb beeile ich mich zu erklären, daß es mir hier auch nicht darum geht, Metaphysikgegner von der Unhaltbarkeit ihrer Argumente zu *überzeugen*, sondern diese Unhaltbarkeit als einen Einstieg in die Metaphysik zu nutzen. Mein Versuch einer Begründung setzt da an, wo Wittgenstein die Leiter wegwirft, bzw. sich ins Mystische flüchtet, als wüßte er, daß es etwas zu vertuschen gibt. Das, was für Wittgenstein nicht sagbar ist, ist das Aufschlußreiche, gerade weil es sich der Sprache des Schulmeisters entzieht.

[20] [12], p. 72.

[21] [6], S. 236.

[22] Und wenn es sich tatsächlich um Metaphysik handelt, so um *gute Metaphysik*, eben deshalb, weil sie einer *schlechten Metaphysik* entgegengesetzt ist.

Hier will ich ansetzen. Ich beginne damit, daß ich meine Alternative den zwei Lesarten von Carnaps Behauptung, die ich auf S. 81 aufgeführt habe, gegenüberstelle. Das sieht dann folgendermaßen aus:

1. Es gibt *keine* logisch korrekt aufgebaute Sprache, in der irgendein metaphysischer Satze sinnvoll wäre.
2. Es gibt logisch korrekt aufgebaute Sprachen, in der alle metaphysischen Sätze sinnlos sind.
3. Es gibt logisch korrekt aufgebaute Sprachen, in der (gewisse) metaphysische Sätze sinnvoll sind.

Auch bei einer extrem wohlwollenden Haltung gegenüber Carnaps Unterfangen kann man wohl nicht ernsthaft behaupten, daß Carnap die Richtigkeit der ersten Alternative gezeigt hat. Die zweite Alternative erscheint wenig beeindruckend. Man kann immer eine Sprache vorgeben, die so rudimentär ist, daß sich kaum etwas darin ausdrücken läßt. Die dritte Behauptung ist die, deren Richtigkeit ich hier zeigen will. Mit anderen Worten, es gibt eine (nach den Maßstäben der mathematischen Logik korrekt aufgebaute) Sprache Σ (die man vorgeben kann), in der metaphysische Begriffsbildungen von der Art, die Carnap als sinnlos bezeichnet, widerspruchsfrei durchgeführt werden können. Inwieweit dabei eine *sinnvolle Wissenschaft* herauskommt, soll hier der Erfahrung überlassen werden, nicht — wie für die Empiristen — einer Spekulation über die Natur der menschlichen Erkenntnis.

Die Entwicklung der modernen Logik hat nicht nur die Voraussetzung für Carnaps Behauptung geschaffen, daß metaphysische Sätze (aufgrund inhärenter Sphärenvermengungen) in gewissen Sprachen sinnlos sind, sondern auch die Mittel, alternative Systeme der Logik zu entwerfen. Diese Möglichkeit hat Carnap nicht berücksichtigt, und das ist es, was seinem Versuch einer Überwindung der Metaphysik den penetranten Beigeschmack des Wunschdenkens verleiht.

Die symbolische Logik zu Anfang des 20. Jahrhunderts, mit dem Versprechen, alle Mathematik als analytisch nachzuweisen, und einer durch die Paradoxien der (höheren) Logik und Mengenlehre erzwungenen Typenunterscheidung, war für Carnap ein verheißungsvoller Ausgangspunkt, seinen puristischen Ideen eine Grundlage zu verschaffen. Aber die Zutaten paßten nicht zusammen: die Typenunterscheidung machte den Traum von der rein logischen Begründung der Mathematik zunichte. Das logizistische Programm in der Gestalt der *Principia Mathematica* erfüllte die

Hoffnungen des logischen Empirismus nicht. Spätestens mit der Einführung eines Unendlichkeitsaxioms ist der Anspruch auf eine rein logische Begründung verwirkt.

Es war aber nicht einfach nur ein Versuch der Reduktion von Mathematik auf Logik gescheitert; mit Gödels Unentscheidbarkeitsergebnis war klar, daß eine vollständige Rückführung der Arithmetik auf Logik grundsätzlich nicht gelingen kann. Der logische Empirismus hatte zu seinem Ausgangspunkt einen Ansatz gewählt, der zu diesem Zeitpunkt schon gescheitert war. Aber Carnap und Wittgenstein haben sich für eine Vogel-Strauß-Politik entschieden und schlichtweg nicht zur Kenntnis genommen, was ihrer Grundüberzeugung zuwiderlief. Wittgenstein hat seine Haltung auf einen einfachen Nenner gebracht: „Meine Aufgabe ist es nicht, über den Gödelschen Beweis, z. B., zu reden; sondern an ihm vorbeizureden.“[23]

Die symbolische Logik als Verbündete des Empirismus war ein Traum, der an der Komplexität formaler Systeme zerbrochen ist. In der Philosophie, nicht nur der empiristischen, gibt es eine gewisse Vorliebe für simplifizierte Modelle, und der logische Empirismus ist ein Opfer dieser Vorliebe geworden. Jahrzehnte später schreibt Stegmüller unter der Überschrift „Falsche Orientierung am großen Bruder?“:

> Die Entwicklung der Philosophie der Mathematik zu einer exakten Wissenschaft, genannt *Metamathematik*, ist durch die mathematische Grundlagenkrise hervorgerufen worden. Da diese Krise durch die Entdeckung der mengentheoretischen Antinomien ausgelöst wurde, wird sie oft so dargestellt, als habe es sich dabei um ein *tragisches Ereignis in der modernen Mathematik* gehandelt.
>
> Betrachtet man diesen Vorgang unter dem Aspekt der Wirkung, so gelangt man eher zu der gegenteiligen Beurteilung: Die Entdeckung von Antinomien war ein höchst *glückliches Ereignis*; denn sie bewirkte den Zwang zur Formalisierung und Präzisierung des Erkenntnisgegenstandes der Philosophie der Mathematik. Intuitive Vorstellungen vom mathematischen Denken wurden durch genau beschreibbare Objekte ersetzt und die Philosophie der Mathematik entwickelte sich zur mathematischen Grundlagenforschung, die in allen ihren Verzweigungen zu Disziplinen führte, die der Mathematik an Präzision nicht nachstanden und die heute selbst als Teile der Mathematik angesehen werden.

[23] [64], S. 383.

> In den empirischen Wissenschaften ist es *leider* zu keiner Grundlagenkrise dieser Art gekommen. Und daher ergab sich auch kein Zwang, die Begriffs- und Theorienbildungen in diesen Disziplinen in Objekte zu verwandeln, die sich für exakte metatheoretische Studien eignen. Man tat nur so, *als ob* solche Objekte vorlägen. ⟦. . .⟧
>
> Somit blieb ⟦. . .⟧ nur eine *Philosophie des Als-Ob*, die sich am großen Bruder *Metamathematik* orientierte: Was sich dort als so außerordentlich fruchtbar erwiesen habe, das *müsse* sich auch hier als fruchtbar erweisen.[24]

In den empirischen Wissenschaften mag es zu keiner Grundlagenkrise dieser Art gekommen sein, aber für die Metaphysik sieht das ganz anders aus. Kant hat, in einer großangelegten Studie mit dem Titel „Kritik der reinen Vernunft", versucht zu zeigen, daß es in der Natur der metaphysischen Begriffsbildung liegt, zu antinomischen Ergebnissen zu führen. Seine eigene Reaktion darauf war klassisch in dem Sinne, daß er diese Begriffsbildung beschränken wollte. Hegel hat demgegenüber auf die konstitutive Rolle dieser Begriffsbildung verwiesen und versucht, die Widersprüche in eine Ableitung von Denkbestimmungen zu integrieren.[25] In dieser Situation, in der es tatsächlich auf exakte metatheoretische Untersuchungen der Begriffs- und Theorienbildung ankommt, sollten die Methoden der Metamathematik von außerordentlichem Nutzen sein.

Im folgenden werde ich, im Anschluß an Hegels Idee, ein nicht-klassisches System der (höheren) Logik vorstellen, das es erlaubt, auf unverfängliche Weise die wildesten Typenvermengungen vorzunehmen, um dann mit den daraus resultierenden, aber nun durch eine nicht-klassische Logik entschärften, Widersprüchen viele schöne Dinge zu tun, die aus

[24] [56], S. 1 f.

[25] Man vergleiche [29], S. III:

> Hegel ⟦hat⟧ der Erscheinung des Widerspruchs einen systematischen Ort im Denken zugewiesen und hat das Schema des Widerspruchs im Geschehen der Wirklichkeit nachzuweisen versucht. Aber er und auch die folgenden Denker haben sich nicht bemüht, das Phänomen deskriptiv zu erfassen. Unterdessen sind die Möglichkeiten einer deskriptiven Bearbeitung der Widersprüche gewachsen. Um nur eine zu nennen: in einem Zweig der Mathematik, der Mengentheorie, sind Widersprüche aufgetreten.

Dieses Zitat stammt aus derselben Zeit wie Carnaps Versuch einer Überwindung der Metaphysik.

Carnaps Sicht zu sinnlosen Sätzen führen müßten.[26] Tatsächlich wird der klassische Standpunkt, mit seinen tradierten Vorstellungen von Sinn, Bedeutung und Wahrheit, einen solchen Eingriff nicht unbeschadet überstehen; aber das ist es gerade, was für die Begründung der Metaphysik eine neue Möglichkeit schafft — jenseits aller Haken und Ösen eines semantischen Korsetts.

Zuerst aber will ich versuchen zu klären, worum es mir in der Metaphysik eigentlich geht.

2. Was heißt hier „Metaphysik"?

Die frühesten uns überlieferten Zeugnisse eines Denkens, das ich als metaphysisch begreife und für das ich hier einen Begründungsvorschlag ausarbeiten will, stammen aus dem fünften Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung und werden Parmenides zugeschrieben:[27]

> οὔτε γὰρ ἂν γνοίης τό γε μὴ ἐὸν (οὐ γὰρ ἀνυστόν)
> οὔτε φράσαις.[28]

> ... τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστίν τε καὶ εἶναι.[29]

> χρὴ τὸ λέγειν τε νοεῖν τ' ἐὸν ἔμμεναι· ἔστι γὰρ εἶναι,
> μηδὲν δ' οὐκ ἔστι·[30]

> ταὐτὸν δ' ἐστὶ νοεῖν τε καὶ οὕνεκεν ἔστι νόημα.
> οὐ γὰρ ἄνευ τοῦ ἐόντος, ἐν ὧι πεφατισμένον ἐστίν,

[26] Die Definition eines Begriff der Sinnlosigkeit wird jedoch nicht dazu gehören, da es sich dabei, aus meiner Sicht jedenfalls, um einen wirklich sinnlosen Begriff handelt.

[27] Natürlich gibt es Gelehrte, die gegen diese Einordnung des Parmenides in den Kontext einer logisch-metaphysischen Tradition Einspruch erheben, doch, frei nach Quine ([45], S. 345), das ist nun einmal die Strafe, die darauf steht, einem berühmten Philosophen irgend etwas zuzuschreiben.

[28] [10], S. 231, Parmenides Frag. 2, 7; übersetzt als „denn weder erkennen könntest du das Nichtseiende (das ist ja unausführbar) noch aussprechen". Vgl. [8], S. 53, fr. 3.

[29] Ebd., Parmenides Frag. 3; übersetzt als „denn dasselbe ist Denken und Sein". Vgl. auch [8], S. 55, fr. 4.

[30] Ebd., S. 232, Parmenides Frag. 6; übersetzt als „Nötig ist zu sagen und zu denken, daß *nur* das Seiende ist; denn Sein ist, ein Nichts dagegen ist nicht".

εὑρήσεις τὸ νοεῖν· οὐδὲν γὰρ ⟨ἢ⟩ ἔστιν ἢ ἔσται
ἀλλο πάρεξ τοῦ ἐόντος⟦.⟧[31]

Soweit Parmenides. Aristoteles schreibt den folgenden Ausspruch Herakleitos zu:

πάντα εἶναι καὶ μὴ εἶναι,[32]

und kommentiert, daß diese Lehre „alles wahr zu machen" scheint.

Leukippos und Demokritos wird, ebenfalls von Aristoteles, folgender Ausspruch zugeschrieben:

οὐδὲν μᾶλλον τὸ ὂν τοῦ μὴ ὄντος εἶναι⟦.⟧[33]

Worauf es mir bei diesen überlieferten Bruchstücken ankommt, ist die zentrale Stellung von Sein und Nichts (oder Nichtsein). Das sind hier und später die immer wiederkehrenden Themen, und das vor dem Hintergrund ihrer Beziehung zum Denken: Wie kann man das, was nicht ist, widerspruchsfrei denken oder sagen?

In seinen Vorlesungen zur Geschichte der Philosophie sagt Hegel über Parmenides:

> Mit Parmenides hat das eigentliche Philosophieren angefangen, die Erhebung in das Reich des Ideellen ist hierin zu sehen. Ein Mensch macht sich frei von allen Vorstellungen und Meinungen, spricht ihnen alle Wahrheit ab und sagt, nur die Nothwendigkeit, das Seyn ist das Wahre. Dieser Anfang ist freilich noch trübe und unbestimmt; es ist nicht weiter zu erklären, was darin liegt; aber gerade dieß Erklären ist die Ausbildung der Philosophie selbst, die hier noch nicht vorhanden ist. Damit verband sich die Dialektik, daß das Veränderliche keine Wahrheit habe; denn wenn man diese Bestimmungen nimmt, wie sie gelten: so kommt man auf Widersprüche.[34]

[31] Ebd., S. 238, Parmenides Frag. 8, 34 ff; übersetzt als „Dasselbe ist Denken und der Gedanke, daß IST *ist*; (35) denn nicht ohne das Seiende, in dem es als Ausgesprochenes ist, kannst du das Denken antreffen. Es ist ja nichts und wird nichts anderes sein außerhalb des Seienden".

[32] [21], S. 202; Aristoteles, Metaphysik IV, 7, 1012 a 25. „Alles ist und ist nicht".

[33] Ebd., S. 30; Aristoteles, Metaphysik I, 4, 985 b 9. In Hegel [27], S. 348 (Fußnote **), unter Berufung auf Aristoteles irrtümlich Herakleitos zugeschrieben, übersetzt als: „Das Seyn ist nicht mehr als das Nichtseyn".

[34] [27], S. 312 f.

Das ist im großen und ganzen eine Sicht, die ich mir zu eigen gemacht habe und die meiner Auffassung der Metaphysik zugrunde liegt.

Zu sehen, daß sich im Begriff des Seins überhaupt ein philosophisches Problem auftut, ist schon eine begriffliche Leistung, im wesentlichen die Leistung, die Carnap und seine Nachfolger so gerne diskreditiert gesehen hätten.

Bei Aristoteles scheint sich schon ein Verlust des Problembewußtseins abzuzeichnen:

> τὸ ⟦δὲ⟧ ὂν λέγεται πολλαχῶς μέν, ἀλλ’ ἅπαν πρὸς μίαν ἀρχήν· τὰ μὲν γὰρ ὅτι οὐσίαι ὄντα λέγεται, τὰ δ’ ὅτι πάθη οὐσίας, τὰ δ’ ὅτι ὁδὸς εἰς οὐσίαν, ἢ φθοραὶ ἢ στερήσεις ἢ ποιότητες ἢ ποιοτηκὰ ἢ γεννητικὰ οὐσίας, ἢ τῶν πρὸς τὴν οὐσίαν λεγομένον, ἢ τούτων τινὸς ἀποφάσεις ἢ οὐσίας· διὸ καὶ τὸ μὴ ὂν εἶναι μὴ ὂν φαμέν.[35]

Auch wenn Aristoteles das Problem des Parmenides nicht gesehen zu haben scheint, so war er es doch, der das Vorhaben der Wissenschaft, die wir heute als *Metaphysik* bezeichnen, formuliert hat:

> Ἔστιν ἐπιστήμη τις ἥ θεωρεῖ τὸ ὂν ᾗ ὂν καὶ τὰ τοὺτῳ ὑπάρχοντα καθ’ αὑτό. αὕτη δ’ ἐστὶν οὐδεμιᾷ τῶν ἐν μέρει λεγομένον ἡ αὐτή· οὐδεμία γὰρ τῶν ἄλλων ἐπισκοπεῖ καθόλου περὶ τοῦ ὄντος ᾗ ὄν, ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ τι ἀποτεμόμεναι περὶ τούτου θεωροῦσι τὸ συμβεβηκός, οἷον αἱ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν.[36]

[35] [21], S. 146 & 148; Aristoteles, Metaphysik IV, 2, 1003 b 5–11; in [52], S. 83 übersetzt als:

> ⟦Man⟧ spricht ⟦...⟧ zwar in vielfacher Bedeutung vom Seienden, doch stets im Hinblick auf *ein* Prinzip. Man spricht nämlich vom Seienden, weil es entweder ein Wesen ist oder eine Affektion eines Wesens oder weil es ein Weg zum Wesen oder weil es Vergehen, Privation, Qualität, Bewirkendes oder Erzeugendes eines Wesens ist oder von etwas, das in Beziehung auf das Wesen ausgesagt wird, oder gar, weil es Verneinung von etwas derartigem oder eines Wesens ist. Daher sagen wir ja auch, ein Nichtseiendes *sei* nichtseiend.

[36] [21], S. 146; Aristoteles, Metaphysik IV, 1, 1003 a 19–27. In [52], S. 82, übersetzt als:

> Es gibt eine Wissenschaft, die das Seiende, insofern es seiend ist, betrachtet und das, was ihm an sich zukommt. Diese ist aber mit keiner der sogenannten Einzelwissenschaften identisch; denn keine der anderen Wissenschaften betrachtet allgemein das Seiende, insofern es seiend ist, sondern indem sie sich einen Teil vom Seienden herausschneiden, betrachten sie diesen hinsichtlich seines Akzidens, wie das etwa die mathematischen Wissenschaften tun.

Da ist noch keine Rede von letzten Ursachen, höchsten Wesen oder sonstigen Gebilden aus dem Reich des Absoluten. Erste Philosophie, πρώτη φιλοσοφία, betrachtet Seiendes, insofern es seiend ist. Dann geht es aber weiter:

> ἐπεὶ δὲ τὰς ἀρχὰς καὶ τὰς ἀκροτάτας αἰτίας ζητοῦμεν, δῆλον ὡς φύσεώς τινος αὐτὰς ἀναγκαῖον εἶναι καθ' αὑτήν. εἰ οὖν καὶ οἱ τὰ στοιχεῖα τῶν ὄντων ζητοῦντες ταύτας τὰς ἀρχὰς ἐζήτουν, ἀνάγκη καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὄντος εἶναι μὴ κατὰ συμβεβηκός, ἀλλ' ᾗ ὄν· διὸ καὶ ἡμῖν τοῦ ὄντος ᾗ ὂν τὰς πρώτας αἰτίας ληπτέον.[37]

Mit einem letzten Zitat von Aristoteles will ich den Kreis schließen, dessen Ausgangspunkt Parmenides (Denken und Sein sind dasselbe) war:

> αὑτὸν δὲ νοεῖ ὁ νοῦς κατὰ μετάληψιν τοῦ νοητοῦ· νοητὸς γὰρ γίγνεται θιγγάνων καὶ νοῶν, ὥστε ταὐτὸν νοῦς καὶ νοητόν.[38]

Das klingt für mich nicht nur wie eine (teilweise) Rückkehr zu Parmenides (ταὐτὸν νοῦς καὶ νοητόν), sondern darüber hinaus auch wie eine Betonung der Selbstbezüglichkeit im Denken: die Vernunft hat am Gedachten Anteil. Was hier angesprochen wird, ist eine Verquickung dessen, was Carnap auseinanderzuhalten versuchte.

Damit bin ich bei dem, was für mich metaphysisches Denken ausmacht: die Ausrichtung der Aufmerksamkeit auf das Denken als Aktivität, das mit seinem Objekt in einer Weise verbunden ist, daß es konstitutiv für die Erkenntnis seines Gegenstandes wird, d.h. aus dem Wissen nicht weggedacht werden kann. Aber in der weiteren Geschichte der Metaphysik scheint dieser Faden erst einmal verloren gegangen zu sein. Die Frage nach dem Sein als solchem (τὸ ὂν ᾗ ὄν) wurde lange Zeit durch Fragen nach bestimmten „höchsten" Entitäten verdrängt. Da es die Hegelsche

[37] Ebd. 27–33. In [52], S. 82, übersetzt als:

> Da wir aber die Prinzipien und die höchsten Ursachen suchen, so ist es klar, daß diese Ursachen einer an sich existierenden Natur sein müssen. Wenn nun diejenigen, die die Elemente der Dinge suchten, eben diese Prinzipien suchten, so waren notwendigerweise auch die Elemente nicht Elemente des Seienden in akzidentellem Sinne, [30] sondern des Seienden, insofern es seiend ist. Also müssen auch wir die ersten Ursachen des Seienden, insofern es seiend ist, erfassen.

[38] [22], S. 148; Aristoteles, Metaphysik XII, 1072 b 20–22. In [52], S. 314, übersetzt als:

> Sich selbst denkt die Vernunft, indem sie am Gedachten Anteil hat. Gedacht nämlich wird sie selbst, indem sie Gedachtes berührt und denkt, so daß die Vernunft und Gedachtes dasselbe sind.

Aufarbeitung der Metaphysik ist, in deren Tradition mein Begründungsvorschlag steht, soll Hegel selbst bezüglich dieser Metaphysik zu Worte kommen:

> Ihre Gegenstände waren zwar Totalitäten, welche an und für sich der Vernunft angehören; — Seele, Welt, Gott — aber die Metaphysik nahm sie aus der Vorstellung auf, legte sie als fertige gegebene Subjecte, bey der Anwendung der Verstandesbestimmungen darauf, zu Grunde, und hatte nur an jener Vorstellung den Maßstab, ob die Prädicate passend und genügend seyen oder nicht.[39]

Weiterhin, so führt Hegel aus,

> wurde sie dadurch Dogmatismus, weil sie nach der Natur der endlichen Bestimmungen annehmen mußte, daß von zwey entgegengesetzten Behauptungen, dergleichen jene Sätze waren, die eine wahr, die andere aber falsch seyn müsse.[39]

Diese Metaphysik ist durch Kants *Kritik der reinen Vernunft* gewaltig aufgemischt worden. Kant entwickelt darin ein Argument, das zeigen soll, daß wir niemals die *Dinge an sich* erkennen können, sondern nur so, wie sie uns erscheinen, d.h. im wesentlichen durch die Formen der Anschauung (Raum und Zeit), und die Kategorien des Verstandes, die in den vier Gruppen Quantität, Qualität, Relation, und Modalität angeordnet sind.

Kants Argument basiert wesentlich auf der Konstruktion von gewissen beweisbaren Widersprüchen (Antinomien) in der reinen Vernunft (Widerstreit der transzendentalen Ideen). In einem Abschnitt mit dem Titel „Antithetik der reinen Vernunft“ entwickelt Kant vier Antinomien, betreffend Anfang und Ende des Raums und der Zeit, (un)endliche Teilbarkeit der Materie, Kausalität und Freiheit, und Existenz eines höchsten Wesens. Hegels Idee einer Metaphysik als Logik setzt an Kants Interpretation und Auflösung dieser Antinomien der reinen Vernunft an:

> Die Hauptsache, die zu bemerken ist, ist, daß nicht nur in den vier besondern aus der Kosmologie genommenen Gegenständen die Antinomie sich befindet, sondern vielmehr in allen Vorstellungen, Begriffen und Ideen. Dieß zu wissen und die Gegenstände in dieser Eigenschaft zu erkennen, gehört zum Wesentlichen der philosophischen Betrachtung; diese Eigenschaft macht das aus,

[39] [24], S. 39.

> was weiterhin sich als das dialektische Moment des Logischen bestimmt.[40]

In einem darauffolgenden Zusatz heißt es dann:

> Auf dem Standpunkt der alten Metaphysik wurde angenommen, daß wenn das Erkennen in Widersprüche gerathe, so sey dieses nur eine zufällige Verirrung und beruhe auf einem subjectiven Fehler im Schließen und Raisonniren. Nach Kant hingegen liegt es in der Natur des Denkens selbst in Widersprüche (Antinomien) zu verfallen, wenn dasselbe das Unendliche erkennen will. Ob nun schon ⟦...⟧ das Aufzeigen der Antinomien insofern als eine sehr wichtige Förderung der philosophischen Erkenntniß zu betrachten ist, als dadurch der starre Dogmatismus der Verstandesmetaphysik beseitigt und auf die dialektische Bewegung des Denkens hingewiesen worden ist, so muß doch dabei zugleich bemerkt werden, daß Kant auch hier bei dem blos negativen Resultat der Nichterkennbarkeit des Ansich der Dinge stehen geblieben und nicht zur Erkenntniß der wahren und positiven Bedeutung der Antinomien hindurch gedrungen ist. Die wahre und positive Bedeutung der Antinomien besteht nun überhaupt darin, daß alles Wirkliche entgegengesetzte Bestimmungen in sich erhält und daß somit das Erkennen und näher das Begreifen eines Gegenstandes eben nur so viel heißt, sich dessen als einer konkreten Einheit entgegengesetzter Bestimmungen bewußt zu werden.[41]

Hier setzt nun Hegels logische Wende an.

> Die Logik, in der wesentlichen Bedeutung speculativer Philosophie, tritt an die Stelle dessen, was sonst Metaphysik genannt und als eine von ihr abgesonderte Wissenschaft abgehandelt wurde.[42]

Hegel selbst hat schon — allerdings mit äußerst zweifelhaftem Erfolg — in seiner *Wissenschaft der Logik* versucht, die Idee der Metaphysik als Logik umzusetzen. Ich werde nicht versuchen, seinen Argumentationen einen Sinn abzugewinnen. Die Widersprüche von Kant und Hegel sind nicht schlüssig, und Generationen von fleißigen Exegeten haben daran

[40] [25], S. 141.
[41] Ebd., S. 141 f.
[42] [24], S. 38.

nichts ändern können. Statt dessen werde ich mir die Widersprüche der uneingeschränkten Abstraktion zunutze machen. Metaphysik nach Hegelschem Muster zielt dann auf die Widersprüche ab, die Carnap ausschließen will.

Damit wird Metaphysik als Logik zu einer Theorie der Begriffe, etwa in der Tradition von Freges Grundgesetzen, die auf zweierlei abzielt:

1. auf eine Definition in rein logischen Termen von grundlegenden Denkbestimmungen, wie zum Beispiel der Modalität, Quantität, Kausalität, Zeit und Raum (um nur die nächstliegenden zu nennen), und
2. auf eine Ableitung ihrer charakteristischen Gesetze durch rein logische Mittel.

Dafür entlehne ich von Hegel die Bezeichnung „spekulative Logik".[43] Das darf jedoch nicht zu der Annahme verleiten, ich wolle Hegels Logik in irgendeiner Weise zur Darstellung bringen, sei es durch „Formalisierung", „Rekonstruktion", oder sonst einer Form der Auseinandersetzung mit Hegels Text. In den 175 Jahren seit Hegels Tod hat die Hegelinterpretation ihre Unfähigkeit genügend dokumentiert, und ich sehe nicht, daß daran etwas geändert werden kann. Weder Hegel noch seine Exegeten können einen *Inhalt* vorweisen, an dem sich die Ansprüche der spekulativen Logik und Philosophie auf eine besondere Art der Erkenntnis, die sich dem klassischen Denken entzieht, messen lassen. Um einen solchen Inhalt geht es aber im folgenden. Dabei muß klar sein, daß auch wenn die ursprüngliche Idee für einen solchen Inhalt aus der Philosophie Hegels stammt, der hier vorgestellte Inhalt erst durch die Methoden und Resultate der mathematischen Logik zutage getreten ist und sich auch nur durch sie erschließen läßt.

[43] Dieser Ausdruck geht zwar auf Hegel zurück, wurde aber von ihm nur sehr sporadisch gebraucht. Meines Wissens nur in [25], S. 53: „die spekulative Logik enthält die vorige Logik und Metaphysik ..." und S. 195/196, weiterhin [24], S. 36: „In der spekulativen Logik ist die bloße Verstandes-Logik enthalten ...", und S. 275, daß es „gerade die Philosophie, und zwar zunächst die spekulative Logik, ist, welche die Nichtigkeit der ... bloßen Verstandesbestimmungen aufzeigt", sowie [26], S. 57: „die speculative Logik ... zeigt, dass alle jene auf die Seele angewandten Bestimmungen ... in ihr Gegentheil umschlagen". Hegel verwendet ihn in einem Kontext, der ihn in unmittelbare Nähe zum Ausdruck „spekulative Philosophie" stellt, wie etwa in [23], S. 171 (§14): „Die Logik ist ... an sich selbst spekulative Philosophie".

3. Was heißt hier „Selbstbezüglichkeit"?

Es stünde schlecht um das Projekt einer Zurückführung der charakteristischen Eigenschaften von Denkbestimmungen auf Eigenschaften widersprüchlicher Begriffe, gäbe es nur Kants Antinomien und die Widersprüche, die Hegel selbst entdeckt zu haben glaubte. Deshalb eignet sich Carnaps Versuch einer Überwindung der Metaphysik so gut als Hintergrund für meinen Versuch einer Begründung der Metaphysik. Die (einfache) Typentheorie, die Carnap bemüht hat, um metaphysische Satzkonstruktionen als sinnlos zu brandmarken, war von Russell entworfen worden, um Paradoxien in den Grundlagen der (höheren) Logik und Mengenlehre zu vermeiden. Der Effekt der Typenunterscheidung war die Vermeidung einer Form von Selbstbezüglichkeit, wie sie insbesondere der Russellschen Antinomie zugrunde liegt. Mit anderen Worten, wir brauchen uns um Widersprüche nicht zu bemühen — sie sind längst da.

Daß den Widersprüchen der Logik eine erkenntnistheoretische Bedeutung zukommen könnte, die über die rein negative Dimension der Widerlegung einer Grundannahme hinausgeht, wird Carnap wohl nie in den Sinn gekommen sein.[44] Aber für eine Philosophie, die in Widersprüchen den Schlüssel zu den Kategorien sucht, sollten sie wie ein Geschenk des Himmels kommen.[45]

Natürlich ist damit noch nicht gesagt, daß es sich bei den Paradoxien der Logik tatsächlich um Widersprüche handelt, die sich für eine Grundlegung von Denkbestimmungen eignen. Aber es muß klar sein, daß dies eine Frage ist, die ich zu einer Angelegenheit der logischen Forschung — und nicht des philosophischen Wunschdenkens — machen will.

[44] Das ist keine Besonderheit logischer Empiristen. Man vergleiche in dieser Hinsicht [4], p. 26:

> Der Widerspruch ist nicht eine unumgängliche Station auf dem Wege der Wahrheit, sondern ein Zeichen dafür, daß man von diesem Wege abgekommen ist. Er ist im Prinzip vermeidbar und hat keine spekulative Kraft.

Da bleibt nur noch die Frage, ob die Verkündung solcher Einsichten von der hohen Warte der Philosophie für oder gegen die Philosophie spricht.

[45] In diesem Sinne kann man auch folgende Bemerkung in [11], S. 204, verstehen:

> Hegel hat die sprachlichen wie die ontologischen Antinomien der modernen Logik nicht gekannt. Es darf als gesichert gelten, daß er an ihnen seine helle Freude gehabt hätte.

Der Gedanke spricht mich an, scheint mir aber doch zu optimistisch. Davon abgesehen, wenn es so klar ist, daß Hegel die modernen logischen Paradoxien zu würdigen gewußt hätte, warum sind dann seine Adepten so zimperlich?

Vorher aber will ich auf die Frage eingehen, wie überhaupt Selbstbezüglichkeit entsteht.

Selbstbezüglichkeit muß hergestellt werden — und das ist nicht immer einfach. Dabei kann einiges schiefgehen, sei es durch Unverstand oder widrige Umstände. Das folgendes Beispiel aus der anglophonen Hegel-Literatur soll das illustrieren:

> Consider a phrase like, "The phrase on page 5." Note that it applies to itself. Note that if I wrote that phrase on another page, it would not apply to itself, but to the phrase on page 5. Now consider something like, "This very phrase." It refers to itself irrespective of which page it is written on. It refers to itself not contingently, as does the phrase, "The phrase on page 5" but essentially⟦.⟧[46]

Diese Passage steht auf S. 7; als ob ein übelgesinnter Setzer sich über vermeintlichen philosophischen Tiefsinn lustig machen wollte. Oder vielleicht auch nur vom Unsinn ablenken, denn das ist nicht, was an diesem Beispiel so grundsätzlich schiefgegangen ist; es kann leicht richtig gestellt werden, indem man „5“ durch „7“ ersetzt. Das Problem ist, daß auf S. 7 (wie auch auf S. 5) mehr als nur ein einziger Ausdruck steht, und daher der bestimmte Artikel keinen der Ausdrücke auf S. 7 bezeichnet.[47] Sicher kann man auch diesen Mangel beheben, indem man nur den einen Ausdruck „der Ausdruck auf S. 7“ auf S. 7 stehen läßt; aber die Frage bleibt: Sollte es im Jahre 1989 tatsächlich noch Philosophen gegeben haben, denen nicht klar war, worum es beim bestimmten Artikel geht? Und was ist mit der Unterscheidung von „kontingenter“ und „wesentlicher“ Selbstbezüglichkeit? Kann ein Demonstrativpronomen wie „dieser“ die Bürde der „Wesentlichkeit“ tragen, auch wenn es (im Englischen) durch ein „very“ verstärkt wird? Im Deutschen würde man „eben“ oder „genau“ sagen. Und genau darum scheint es mir in dem folgenden Zitat zu gehen:

> »Dies« bezeichnet, was immer im Augenblick, wo das Wort gebraucht wird, das Aufmerksamkeitszentrum in Anspruch nimmt. Bei Wörtern, die nicht egozentrisch sind, ist der unveränderliche Gehalt etwas, was den Gegenstand betrifft, auf den sie sich beziehen, aber »dies« bedeutet in jedem Fall des Gebrauchs etwas an-

[46] [40], S. 7.

[47] Pinkard spricht von „application“, aber ich denke, man kann das durch „denoting“ ersetzen, ohne Pinkard Unrecht zu tun.

> deres. Was hier unveränderlich ist, ist nicht der Gegenstand, auf den sich das Wort bezieht, sondern dessen Beziehung zu dem besonderen Gebrauch des Wortes. So oft das Wort gebraucht wird, hat die Person, die es gebraucht, auf irgend etwas ihre Aufmerksamkeit gerichtet, und dieses irgend etwas bezeichnet das Wort. Wenn ein Wort nicht egozentrisch ist, so braucht es zwischen den verschiedenen Anlässen nicht unterschieden zu werden, bei denen es benutzt worden ist; wohl aber müssen wir diesen Unterschied bei egozentrischen Wörtern machen, weil das, was sie anzeigen, etwas ist, was eine gegebene Beziehung zu dem besonderen Gebrauchsfall des Wortes hat.[48]

Ich hoffe das reicht, um die Schwierigkeiten beim Gebrauch eines Demonstrativpronomens wie „dieser" anzudeuten.

Was dem Autor des oben zitierten Versuchs zur Herstellung von Selbstbezüglichkeit vorgeschwebt haben mag, war vielleicht etwas wie die folgende Darstellung der Antinomie des Lügners bei Tarski:

> ⟦B⟧etrachten wir die Aussage:
>
> Die Aussage 149 Z 20 dieses Aufsatzes ist nicht wahr.
>
> Der Kürze wegen wollen wir diese Aussage durch ›s‹ ersetzen. Gemäß unserer Vereinbarung bezüglich des angemessenen Gebrauchs des Terms ›wahr‹ behaupten wir nun die Äquivalenz der Form (T):
>
> (1) ›s‹ ist genau dann wahr, wenn die Aussage 149 Z 20 dieses Aufsatzes nicht wahr ist.
>
> Wenn wir uns an den Sinn von ›s‹ erinnern, dann stellen wir empirisch fest:
>
> (2) ›s‹ ist mit der Aussage 149 Z 20 dieses Aufsatzes identisch.
>
> Nun folgt nach einem bekannten Gesetz der Theorie der Identität (Leibniz) aus (2), daß wir in (1) den Ausdruck ›die Aussage 149 Z 20 dieses Aufsatzes‹ durch ›s‹ ersetzen können. Dergestalt erhalten wir:
>
> (3) ›s‹ ist wahr genau dann, wenn ›s‹ nicht wahr ist.

[48] [49], S. 100.

> Wir kommen auf diese Weise also zu einem offenkundigen Widerspruch.[49]

Merkwürdigerweise gebraucht Tarski beide Formen der Selbstbezüglichkeit, die indirekte Art der eindeutigen Beschreibung des Satzes und das Demonstrativpronomen „dieser“. Die Wendung „dieser Aufsatz“ kann vermieden werden durch einen Verweis auf den Band der Zeitschrift, in welchem der Aufsatz zuerst erschienen ist. Warum Tarski diese Möglichkeit nicht nutzt und stattdessen auf das Demonstrativpronomen „dieser“ zurückgreift, ist nicht klar, denn worum es ihm geht, ist zu zeigen, daß das empirische Element in der Herstellung der Selbstbezüglichkeit nicht wesentlich ist. Es hätte darüber hinaus den Vorteil, daß die Formulierung auch im Zitat noch funktionieren würde,[50] wie beispielsweise im gegenwärtigen Fall, wo „dieser Aufsatz“ irreführend sein kann.

Ich will das nicht weiter vertiefen, weil es einfache Möglichkeiten gibt, Selbstbezüglichkeit herzustellen, die keinen Gebrauch von Demonstrativpronomina machen. Was mir hier wichtiger erscheint, ist die Möglichkeit, Paradoxien der Selbstbezüglichkeit zu konstruieren, die unabhängig von einem empirischen Auffinden sind. Als Beispiel einer solchen Paradoxie führt Tarski die folgende Formulierung an:

> S sei eine Aussage die mit den Wörtern ›Jede Aussage‹ beginnt. Wir bringen mit S die neue Aussage S^* in Wechselbeziehung, indem wir S den folgenden beiden Modifikationen unterwerfen: wir ersetzen in S das erste Wort ›Jede‹ durch ›Die‹ und fügen an das zweite Wort ›Aussage‹ die ganze Aussage S in Anführungszeichen. Wir wollen vereinbaren, die Aussage S ›(auf sich selbst) anwendbar‹ oder ›nicht (auf sich selbst) anwendbar‹ zu nennen, und zwar in Abhängigkeit davon, ob die in Wechselwirkung zu ihr stehende Aussage S^* wahr oder falsch ist. Betrachten wir nun die Aussage: ›Jede Aussage ist nichtanwendbar‹. Es kann leicht gezeigt werden, daß die oben aufgestellte Aussage anwendbar und nichtanwendbar sein muß, also eine Kontradiktion.[51]

[49] [57], S. 149. Der Vollständigkeit halber will ich darauf hinweisen, daß die Zahlenangaben tatsächlich richtig sind in dem Sinn, daß der fragliche Satz tatsächlich der einzige Satz in Zeile 20 auf S. 149 des angegebenen Aufsatzes ist.

[50] Sozusagen eine „portable paradox formulation“, kurz „ppf“, im Unterschied zu „pdf“.

[51] [57], S. 183 (Anmerkung 12).

Im Vergleich zu dieser Konstruktion von Selbstbezüglichkeit zur Erzeugung einer semantischen Paradoxie erscheint das mengentheoretische Vorgehen zur Herstellung von Selbstbezüglichkeit fast trivial: Grundlage ist die Aussageform $*_1 \in *_1$.[52] Am Beispiel der Russellschen Antinomie sieht das dann so aus: $\mathrm{R} :\equiv \{x : x \notin x\}$. Nun nimmt man sich $\mathrm{R} \in \mathrm{R}$ vor und erhält:

$$\mathrm{R} \in \{x : x \notin x\} \leftrightarrow \mathrm{R} \notin \mathrm{R},$$

das heißt:

$$\mathrm{R} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{R} \notin \mathrm{R}.$$

Mehr braucht es nicht, um klassische Logik ins Chaos zu stürzen. *Tertium non datur* $A \vee \neg A$ erledigt den Rest, indem es daraus die beiden Formeln $\mathrm{R} \in \mathrm{R}$ und $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$, also einen Widerspruch ableitet.

Gegen die hier verwendete Typenvermengung von der einfachen Gestalt $(x \in x)$ richten sich sowohl die (einfache) Typentheorie als auch die Systeme der axiomatischen Mengenlehre. Sie sind erfolgreich, insoweit es darum geht, die Paradoxien auszuschließen,[53] aber nicht, insoweit es darum geht, Selbstbezüglichkeit grundsätzlich zu vereiteln. Gödel hat gezeigt, wie man in der Arithmetik eine Form der Selbstbezüglichkeit erzeugen kann, die — wie die Anführung von Tarski — mit einem Wahrheitsprädikat zu Widersprüchen führt. Das Verfahren ist aufwendig,[54] ich will aber versuchen, die wesentlichen Stationen zu skizzieren.

Was ich als bekannt voraussetze, ist die Möglichkeit, jedem Grundzeichen einer formalen Sprache in eindeutiger Weise eine natürliche Zahl zuzuordnen.[55]

[52] Aussageform in dem Sinne, daß eine Aussage entsteht, wenn alle Vorkommnisse des Zeichen $*_1$ durch ein- und demselben Objektterm ersetzt werden.

[53] Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für die einfache Typentheorie mit Unendlichkeitsaxiom existiert in der Form der Schnitteliminierbarkeit der einfachen Typentheorie ohne Unendlichkeitsaxiom (Beweis von „Takeutis Vermutung“, vgl. [16], S. 176 ff). Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für die „allgemeine Mengenlehre“, i.e. die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre ohne Unendlichkeitsaxiom, ist von Ackermann 1937 geliefert worden.

[54] Gödel führte es 1931 in seinem berühmten Aufsatz ‘Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I’ ein; [18] im Literaturverzeichnis.

[55] Da eine formale Sprache normalerweise unendlich viele Variablen unter ihren Grundzeichen hat, ist das nicht unbedingt völlig trivial. Man behilft sich mit Primzahlen, von denen es nachweislich unendlich viele gibt, und die, sozusagen, *immun* sind gegenüber der Möglichkeit einer Zerlegung in arithmetische Bestandteile.

Der zweite Schritt ist der, Reihen von natürlichen Zahlen wiederum eine natürliche Zahl so zuzuordnen, daß aus dieser Zahl die Reihe wieder rekonstruierbar ist. Das geschieht unter Heranziehung des *Gaußschen Fundamentalsatzes der Arithmetik*,[56] nach dem jede natürliche Zahl größer als 1 in bis auf die Reihenfolge eindeutiger Weise als ein Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann oder selbst eine Primzahl ist. Auf diese Weise kann jedem Ausdruck X der formalen Sprache auf umkehrbar eindeutige Weise eine Ziffer zugeordnet werden, die sogenannte Gödelzahl $\ulcorner X \urcorner$. Dabei zeigen die kleinen Ecken $\ulcorner\ \urcorner$ die numerische Kodifizierung eines Ausdrucks an.

Der nächste Schritt ist die Definition einer Substitutionsfunktion in der Arithmetik. Diese Funktion ist in — vergleichsweise — elementarer Weise berechenbar (primitiv-rekursiv) und kann damit als arithmetische Funktion dargestellt werden, d.h. die folgende Gleichung ist für jede Aussageform $\mathfrak{A}$ und jede natürliche Zahl n in der Arithmetik beweisbar:

$$sub(\ulcorner\mathfrak{A}[x]\urcorner, n) = \ulcorner\mathfrak{A}[n]\urcorner\,.$$

Umgangssprachlich würde das etwa folgendermaßen lauten: $sub(\ulcorner\mathfrak{A}[x]\urcorner, n)$ ist gleich der Gödelzahl des Ausdrucks $\mathfrak{A}[n]$, d.h. des Ausdrucks der aus $\mathfrak{A}[x]$ entsteht, wenn jedes Vorkommnis von x durch n ersetzt wird.

Nun geht man folgendermaßen vor: man wählt für beide Argumente dieser Substitutionsfunktion die Gödelzahl des Ausdrucks $\mathfrak{A}[sub(x,x)]$,[57] d.h. $\ulcorner\mathfrak{A}[sub(x,x)]\urcorner$. Wir nehmen nun $\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}$ als abkürzende Schreibweise für $\ulcorner\mathfrak{A}[sub(x,x)]\urcorner$ und erhalten so die folgende („indirekte“) „Fixpunkteigenschaft“:[58]

$$sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}}) = \ulcorner\mathfrak{A}[sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}})]\urcorner\,.$$

Weshalb das „Fixpunkteigenschaft“ heißt, sollte ausreichend klar werden, wenn wir die Abkürzung $f_{\mathfrak{A}}$ für $sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}})$ hernehmen:

$$f_{\mathfrak{A}} = \ulcorner\mathfrak{A}[f_{\mathfrak{A}}]\urcorner.$$

[56] So genannt, weil Gauß ihn als erster bewiesen hat.

[57] Die Selbstbezüglichkeit wird hier durch $sub(x,x)$ hergestellt, das offensichtlich die Rolle von $(x \in x)$ übernimmt.

[58] Es muß klar sein, daß eine „abkürzende Schreibweise“ nur ein Mittel zur einfacheren Darstellung ist, kein Teil der formalen Sprache. Sie kann also jederzeit wieder eliminiert werden.

Dann ist $f_{\mathfrak{A}}$ ein Fixpunkt bezüglich $\mathfrak{A}$ in folgendem Sinn: Wenn man $\mathfrak{A}$ als Aussagefunktion betrachtet, dann ist ihr Wert für das Argument $f_{\mathfrak{A}}$ wiederum $f_{\mathfrak{A}}$ selbst.

Damit kann nun ein Fixpunktergebnis der folgenden Gestalt bewiesen werden:

$$F \leftrightarrow \mathfrak{F}[\ulcorner \mathfrak{C}[F] \urcorner] .$$

Eine derartige Fixpunkteigenschaft verursacht Schwierigkeiten für die Ausdrückbarkeit von grundlegenden semantischen Begriffen auf der Ebene der formalisierten Theorie selbst (d.h. als ein arithmetisches Prädikat im Falle der Arithmetik, wie z.B. das Prädikat, eine Primzahl zu sein), allen voran das Wahrheitsprädikat, also des Prädikats *tru*, das die folgende Wahrheitsbedingung erfüllt:

$$tru(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A .$$

Mit einen Fixpunkt der Gestalt

$$\ulcorner \neg tru(f) \urcorner = f$$

führt das zu

$$tru(f) \leftrightarrow tru(\ulcorner \neg tru[f] \urcorner) \leftrightarrow \neg tru(f) ,$$

was wiederum mit der klassischen Logik unverträglich ist.

Damit haben wir zwei Arten zur Herstellung von Selbstbezüglichkeit kennen gelernt, die — unabhängig von Demonstrativpronomina, Beschreibung und empirischer Auffindung oder semantischen Methoden wie Anführung — rein syntaktisch funktionieren: mengentheoretisch (höhere Logik) durch Komprehension (Abstraktion) und arithmetisch durch Kodierung. Das läßt sich folgendermaßen in einer Tabelle gegenüberstellen:

mengentheoretisch	arithmetisch
$x \in x$	$sub(x,x)$
$\mathrm{R}_{\mathfrak{A}} :\equiv \{x : \mathfrak{A}[x \in x]\}$	$\mathrm{k}_{\mathfrak{A}} :\equiv \ulcorner \mathfrak{A}[sub(x,x)] \urcorner$
$F_{\mathfrak{A}} :\equiv \mathrm{R}_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{R}_{\mathfrak{A}}$	$f_{\mathfrak{A}} :\equiv sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}})$
$\mathfrak{A}[F_{\mathfrak{A}}] \leftrightarrow F_{\mathfrak{A}}$	$\ulcorner \mathfrak{A}[f_{\mathfrak{A}}] \urcorner = f_{\mathfrak{A}}$

Als Beispiel für die linke Spalte habe ich Russells Antinomie angeführt, wo $\mathfrak{A}$ im Wesentlichen die Negation ist: $\neg F \leftrightarrow F$. Als Beispiel für die zweite Spalte habe ich Tarskis Wahrheitsantinomie genannt.

Die Typentheorie wurde entworfen, um die erste (mengentheoretische) Form der Selbstbezüglichkeit zu unterbinden. Die zweite (arithmetische) Form der Selbstbezüglichkeit läßt sich nicht unterbinden, sobald ein gewisses Maß an Arithmetik zur Verfügung steht.

Es ist die indirekte Form der Selbstbezüglichkeit, die philosophisch aufschlußreich ist. Es kann passieren, daß eine Aussage über einen Sachverhalt auf der Gegenstandsebene gleichzeitig als eine (kodierte) Aussage über einen Sachverhalt auf der Theorieebene interpretiert werden kann, und zwar so, daß die beiden unvereinbar sind. Das klassische Beispiel ist die Konstruktion von Gödels unentscheidbarem Satz. Eine formalisierte Theorie, die die Formulierung aller primitiv-rekursiven Funktionen erlaubt, wie zum Beispiel die Theorie **PRA** der primitiv-rekursiven Arithmetik, kann so in den Objektbereich abgebildet werden, daß es möglich wird, in dieser Theorie Aussagen — in kodierter Form — über dieselbe zu machen.

Aussagenebene		Objektebene
$\mathfrak{A}[sub(x,x)]$	$\longleftarrow$	$sub(x,x)$
	$\searrow$	$\mathrm{k}_{\mathfrak{A}} :\equiv \ulcorner \mathfrak{A}[sub(x,x)] \urcorner$
		$\downarrow$
$f_{\mathfrak{A}} = \ulcorner \mathfrak{A}[f_{\mathfrak{A}}] \urcorner$	$\longleftarrow$	$f_{\mathfrak{A}} :\equiv sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}})$
$\downarrow$		
$G_{\mathfrak{A}} :\equiv \mathfrak{A}[f_{\mathfrak{A}}]$		
$\downarrow$		
$G_{\mathfrak{A}} \leftrightarrow \mathfrak{A}[\ulcorner G_{\mathfrak{A}} \urcorner]$		

Man mache sich die Gleichung

$$sub(\ulcorner \mathfrak{A}[sub(x,x)\urcorner, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}}) = \ulcorner \mathfrak{A}[sub(\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{k}_{\mathfrak{A}}))\urcorner$$

klar, die den letzten Übergang von der Objektebene zur Aussagenebene kennzeichnet. Sie ist das Herz der (indirekten) Fixpunkteigenschaft.

Das Hin- und Her zwischen den beiden Ebenen im obigen Diagramm ist charakteristisch für das Herstellen von Selbstbezüglichkeit in Theorien, die ausreichend Arithmetik enthalten:

> *self-reference is never direct: it comes from a controlled confusion of two levels of meaning for integers, which are seen both as numbers and as names for formulas.*[59]

Das ist es, was Wittgenstein nicht sehen konnte oder wollte; oder, um mit Adorno zu reden, was „den Positivisten wie Musik in den Ohren mißtönt".[60] Aber, um gleich Adorno und Co. auf Distanz zu halten, dieses Moment des „Unauflöslichen" ist keine Angelegenheit sprachlicher Verrenkungen und Kunststückchen, wie sie uns von einer gewissen philosophischen Seite so gerne vorgeführt werden, sondern ein Ergebnis der formalisierten Arithmetik, das wiederum zu einem integralen Bestandteil der Informatik geworden ist.

Mit anderen Worten, Selbstbezüglichkeit erzeugt Doppeldeutigkeit („Ambiguität"), die sich im Falle der Arithmetik nicht vermeiden läßt. Das hat eine erkenntnistheoretische Bedeutung. Ambiguität ist eine unvermeidliche „Realität" unserer Beschreibung, die den Puristen nicht gelegen kommen mag, die aber Raum für eine Grundlegung von Denkbestimmungen nach Hegelschem Muster schafft: Bestimmungen, die ihren Ursprung in dieser Ambiguität haben, können zwar nicht als objektiv in dem Sinne gelten, daß sie den Objekten *an sich* zuzuschreiben wären, aber dennoch sind sie intersubjektiv überprüfbar, d.h. es kommt ihnen eine subjektunabhängige Gültigkeit zu.

Im Unterschied zur arithmetischen Form der Selbstbezüglichkeit, die, wie Odifreddi bemerkt, nie direkt ist, verträgt sich die mengentheoretische Selbstbezüglichkeit, wie sie z.B. in Russells Antinomie verwendet wurde, nicht mit der klassischen Logik. Das weist auf einen grundsätzlichen Unterschied zwischen den beiden Formen der Selbstbezüglichkeit hin. Dann stellt sich aber die Frage, ob bzw. wie weit die klassische Logik überhaupt für die indirekte Form der Doppeldeutigkeit angemessen ist. Es ist durchaus denkbar, daß die klassische Logik bei der Anwendung auf die indirekte Fixpunkteigenschaft zu Ergebnissen führt, die in gewisser Weise *falsch* sind. Diesen Gedanken will ich aber hier nicht weiter verfolgen, da ich ohnehin nur mit der direkten Fixpunkteigenschaft arbeiten werde, und da führt an einer Einschränkung der Logik kein Weg vorbei.

[59] [35], S. 165; kursiv im Original.
[60] [34], S. 45.

4. Reaktionen auf die Paradoxien der Selbstbezüglichkeit

Was ich oben (S. 92) hinsichtlich des Begriffs des Seins gesagt habe, gilt auch für die Paradoxien der Selbstbezüglichkeit: Zu sehen, daß sich hier überhaupt ein philosophisches Problem auftut, ist schon eine begriffliche Leistung. Daß es sich dabei nicht um eine Selbstverständlichkeit handelt, wird beispielsweise durch folgendes Zitat nahegelegt:

> Sätze wie ⟦der Lügner⟧, die ihre eigene Falschheit aussagen, müssen offenbar vermieden werden, und wir vermeiden sie auch faktisch in der natürlichen Sprache aus ebenso prinzipiellen Gründen wie den Widerspruch überhaupt.[61]

Wie gut für die natürliche Sprache und die Philosophie, die sich ihrer bedient. Damit kann das Problem der Paradoxien aus der Philosophie verabschiedet und in den Bereich deduktiver Systeme abgeschoben werden.

Für Frege ließ Russells Antinomie keinen Zweifel an der Unverträglichkeit seines Grundgesetzes V mit dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten. In einem Nachwort zu [15] erwägt Frege Möglichkeiten, dieser Situation zu begegnen. Zwei Fragen ragen heraus:[62]

1. Sollen wir annehmen, das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten gelte von den Klassen nicht?[63]
2. Oder sollen wir annehmen, es gebe Fälle, wo einem unanfechtbaren Begriffe keine Klasse entspreche, die sein Umfang wäre?

Das läuft auf folgende Alternative hinaus: Einschränkung der Logik oder Einschränkung der Begriffsbildung. Der Weg einer Einschränkung der Begriffsbildung wird typischerweise von der einfachen Typentheorie und Zermelos Mengenlehre beschritten. Auch Frege selbst hatte noch im Nach-

[61] [60], p. 197. Die „prinzipiellen Gründe“ würden mich interessieren, aber darüber von einem Philosophen detaillierten Aufschluß zu erhalten, ist wohl zu viel verlangt.

[62] [15], S. 254.

[63] In [15], auf S. 69, sagt Frege:

> Eine Definition eines Begriffes (möglichen Prädikates) muss vollständig sein, sie muss für jeden Gegenstand unzweideutig bestimmen, ob er unter den Begriff falle (ob das Prädikat mit Wahrheit von ihm ausgesagt werden könne) oder nicht.

Eine Aufweichung dieses Grundsatzes scheint mir Frege hier als Möglichkeit in Betracht zu ziehen, ohne jedoch grundsätzlich das logische Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten anzuzweifeln.

wort zum zweiten Band der Grundgesezte einen Vorschlag gemacht, wie Umfänge einzuschränken seien,[64] der sich aber als unzureichend herausstellte.

Etwa zur gleichen Zeit machte sich Russell Gedanken, wie er der nach ihm benannten Antinomie begegnen sollte. Hier ist seine erste, noch vorläufige, Formulierung der (einfachen) Typentheorie:

> It will ⟦...⟧ be necessary to distinguish (1) terms, (2) classes, (3) classes of classes, and so on *ad infinitum*; we shall have to hold that no member of one set is a member of any other set, and that $x \epsilon u$ requires that x should be of a set of a degree lower by one than the set to which u belongs. Thus $x \epsilon x$ will become a meaningless proposition; and in this way the contradiction is avoided.[65]

Das läuft auf eine Einschränkung der Sprache hinaus, in dem Sinne, daß $x \in x$ gar nicht erst gebildet werden kann. Hier kündigt sich Carnaps Sphärenunterscheidung an.

Es war Russell jedoch klar, daß eine solche (einfache) Typenunterscheidung gegen die sogenannten *semantischen* Paradoxien nichts ausrichten konnte, da letztere nicht von Mengen und Elementen handeln.

Erst fünf Jahre später formulierte Russell sein berühmtes *vicious circle principle*, das eine zusätzliche Schichtung innerhalb der Typen erforderte, wodurch auch die semantischen Paradoxien ausgeschlossen wurden.

> These fallacies ⟦...⟧ are to be avoided by what may be called the 'vicious-circle principle'; i.e., 'no totality can contain members defined in terms of itself'. This principle, in our technical language, becomes: 'Whatever contains an apparent variable must not be a possible value of that variable'. Thus whatever contains an apparent variable must be of a different type from the possible values of that variable; we will say that it is of a *higher* type.

[64] In [15], auf S. 262. Die uneingeschränkte Abstraktion hatte Frege nicht unter die Grundgesetze aufgenommen, sie kann aber unschwer aus Grundgesetz V abgeleitet werden. Frege setzte sich ausführlich mit dem Problem der Begriffsbildung auseinander, insbesondere wie Begriffe als Objekte der Sprache zur Verfügung stehen können. Seine philosophische Analyse ist in seinem Aufsatz „Begriff und Gegenstand" enthalten, wo er den Begriff „Werthverlauf" einführt. Frege hat auch daran gedacht, zu beweisen, daß alle Terme eine Bedeutung haben. Dabei ist ihm aber ein Fehler unterlaufen, wie Bartlett [2], S. 72 f, aufgezeigt hat.

[65] [46], S. 517.

> Thus the apparent variables contained in an expression are what determines its type. This is the guiding principle⟦.⟧[66]

Zu dieser Zeit legte auch Zermelo seine Untersuchungen zur Grundlegung der Mengenlehre vor. Sein Konzept hat in der Form der Zermelo-Fraenkel-Skolem-Mengenlehre bis heute Bestand.

In der Mengenlehre hat man sich darauf zurückgezogen, daß der ursprüngliche (naive) Mengenbegriff nicht von einer Klassifikation ausging, sondern von dem Begriff der Kollektion vorhandener Elemente („iteratives Mengenkonzept“ oder „kumulative Hierachie der Mengen“). Damit scheint so etwas wie $(x \in x)$ tatsächlich ausgeschlossen zu sein, was bedeuten würde, daß die Mengenlehre nicht von den gängigen Paradoxien der Selbstbezüglichkeit betroffen ist. So hat Gödel schon in [19] argumentiert. Aber gleichzeitig hat er auch immer wieder darauf hingewiesen, daß die intensionalen Paradoxien, also die Paradoxien der Logik, nach wie vor (1964) nicht gelöst sind, womit sich die ganze Problematik einfach nur auf die höhere Logik verlagert.

Anfang der dreißiger Jahre des letzten Jahrhunderts hat Tarski einen Vorschlag gemacht, wie die semantischen Paradoxien zu umgehen sind, der weitgehende Zustimmung gefunden hat.

> Wenn wir ⟦...⟧ die ⟦wesentlichen⟧ Voraussetzungen analysieren, die zur Antinomie des Lügners führen, so stellen wir das Folgende fest:
>
> (I) Wir haben unausgesprochen vorausgesetzt, daß die Sprache, in der die Antinomie konstruiert worden ist, neben deren Ausdrücken auch die Namen derselben enthält, ferner semantische Terme wie ›wahr‹ in bezug auf Aussagen dieser Sprache. Wir haben auch vorausgesetzt, daß alle Aussagen, die den angemessenen Gebrauch dieses Terms festlegen, in der Sprache behauptet werden können. Eine Sprache mit diesen Eigenschaften wird als ›*semantisch geschlossen*‹ bezeichnet.
>
> (II) Wir haben vorausgesetzt, daß in dieser Sprache die üblichen Gesetze der Logik gelten.
>
> ⟦...⟧ Da jede Sprache, die diese beiden Voraussetzungen erfüllt, inkonsistent ist, müssen wir wenigstens eine von ihnen verwerfen.[67]

[66] [47], S. 75.
[67] [57], S. 150 f.

Bekanntlich entschließt sich Tarski, nur die Möglichkeit einer Preisgabe der Annahme (I) zu erwägen, d.h. Preisgabe semantisch geschlossener Sprachen.

Damit haben wir die wichtigsten Strategien zur Vermeidung von Paradoxien erwähnt: die einfache Typentheorie und das iterative Mengenkonzept, sowie die Sprachstufen als Strategie zur Vermeidung von semantischen Paradoxien.

Strategien, die klassische Logik einzuschränken, haben es schwerer gehabt sich durchzusetzen. Schlimmer noch, es hat immer wieder Stimmen, auch von logisch nicht ganz Unbedarften gegeben, die die Möglichkeit einer solchen Einschränkung, oder zumindest ihren Sinn, bezweifelt haben. Der Grundtenor ist von Tarski vorgegeben worden:[68]

> Es wäre überflüssig, hier die Konsequenzen der Verwerfung von Voraussetzung (II) hervorzuheben, das heißt, unsere Logik (vorausgesetzt, daß das möglich ist) in ihren elementareren und fundamentaleren Teilen zu verändern.[69]

Warum es überflüssig wäre, verrät Tarski nicht, und wahrscheinlich tut er gut daran. So wie die Behauptung dasteht, ist sie ein wohlfeiles und höchst effektives Mittel, naive Gemüter zu beeindrucken. Entsprechend ist Tarskis Auffassung endlos wiederholt und variiert worden, bis hin zur phantasievollen Ausschmückung:

> Wir stehen also vor der Alternative: Preisgabe der semantischen Geschlossenheit der Sprache oder Ersetzung logischer Grundregeln durch neue. Das letztere würde eine wissenschaftliche Katastrophe darstellen; denn es ist nicht einzusehen, wie bei Verwerfung jener einfachen logischen Prinzipien und Deduktionsregeln, die bei der Konstruktion der semantischen Antinomien verwendet wurden, auch nur ein geringer Bestandteil des als „Wissenschaft“ bezeichneten Forschungsbetriebes aufrechterhalten werden könnte. Es bleibt daher nur der erste Ausweg⟦.⟧[70]

[68] Das ist umso bemerkenswerter, als Tarski als Koautor des in Fußnote 14 erwähnten Aufsatzes erscheint, in dem eine unendlich-wertige Aussagenlogik vorgestellt wird, die sehr wohl eine uneingeschränkte Abstraktion für die Aussagenlogik zuläßt (vgl. [54]) — und bei einer geeigneten Erweiterung auch für die Prädikatenlogik (vgl. [62]).

[69] [57], S. 151.

[70] [55], S. 38 f.

Für Schulmeisternaturen sind die Paradoxien offensichtlich ein willkommener Anlaß, der Sprache Einschränkungen aufzuerlegen und zu bestimmen, was gesagt werden darf bzw. sich sinnvoll sagen läßt. Carnap war da kein Einzelfall mit seinem Verbot von Sphärenvermengungen. Auch runde vierzig Jahre später lebt der Traum vom Verbieten von Ausdrücken fort, wie das nächste Zitat zeigt:

> ⟦D⟧as Auftreten der von Russell gefundenen Antinomie zeigt, daß ein sinnloser Ausdruck verwendet worden ist und diese Verwendung keineswegs harmlos war. Damit wird man die Frage stellen dürfen, weshalb wir denn überhaupt sinnlose Ausdrücke zulassen sollen, statt Freges Forderungen an die korrekte Bildung von Ausrücken zu verschärfen und sinnlose Ausdrücke ein für allemal zu verbieten.[71]

Warum sollten wir sinnlose Ausdrücke zulassen? Gegenfrage: Wer bestimmt, was sinnlose Ausdrücke sind? Auch der von Russell benutzte Term kann in einer entsprechenden Mengenlehre sehr sinnvoll eingesetzt werden: nämlich um zu zeigen, daß durch ihn keine Menge bezeichnet wird. Auch wenn ein Kriterium der Sinnlosigkeit es schaffen sollte, die Klippe der Ideologie zu umschiffen, so bleibt doch immer noch die Frage, ob man sinnlose Ausdrücke ausschließen kann, ohne möglicherweise auch sinnvolle Ausdrücke auszuschließen. Ausdrücke sind nicht mit Etiketten versehen, die sie als sinnlos oder sinnvoll ausweisen.

Frege war sich der Schwierigkeit bewußt, wie folgendes Zitat aus dem Nachlaß nahelegt:

> Es ist schwer, einen allgemein üblichen Ausdruck zu vermeiden, wenn man die Fehler, die daraus entspringen können, noch nicht kennengelernt hat. Es ist gar schwer, vielleicht unmöglich, jeden Ausdruck, den uns die Sprache darbietet, auf seine logische Unverfänglichkeit zu prüfen. So besteht denn ein grosser Teil der Arbeit des Philosophen — oder sollte wenigstens bestehen — in einem Kampfe mit der Sprache. Aber vielleicht sind nur wenige sich dieser Notwendigkeit bewusst.[72]

Ich fürchte, Freges Kampf mit der Sprache ist, insbesondere von denen, die sich so eilfertig auf ihn berufen, nicht als permanente Auseinander-

[71] [58], S. 42. Und der Rohrstock schwingt immer mit.
[72] [30], S. 289.

setzung mit der Sprache verstanden worden, sondern als Einzwängen, ein Knebeln der Sprache. Es wird sich von selbst verstehen, daß ich diesem Beispiel nicht zu folgen beabsichtige. Was ich anstrebe, ist eine Einschränkung der Logik zugunsten einer uneingeschränkten Abstraktion, ohne daß kontradiktorische Widersprüche, also Widersprüche der Gestalt A und nicht-A, beweisbar werden. Auf diese Weise will ich versuchen, einen Bereich für die Vernunft zu erschließen, den die klassische (Verstandes-) Logik mit ihren rigiden Prinzipien verbaut.

5. Eine Einschränkung der klassischen Logik

Um das Privileg einer uneingeschränkten Abstraktion (Begriffsbildung) in Anspruch nehmen zu können, muß ich einen Weg finden, die klassische Logik so einzuschränken, daß die Paradoxien der uneingeschränkten Abstraktion keinen Schaden anrichten können.

Es liegt nahe, beim Satz vom ausgeschlossenen Dritten (*Tertium non datur*) anzusetzen. Hegel hat ihn als einen Satz des bestimmten Verstandes charakterisiert:

> Der Satz d e s a u s g e s c h l o s s e n e n D r i t t e n ist der Satz des bestimmten Verstandes, der den Widerspruch von sich abhalten will, und indem er dies thut, denselben begeht.[73]

Von daher könnte man erwarten, daß er ihn, als ungeeignet für das spekulative Denken, aus der spekulativen Logik ausschließt. Dagegen scheint jedoch folgende Bemerkung zu stehen:

> In der spekulativen Logik ist die bloße V e r s t a n d e s - L o g i k enthalten und kann aus jener sogleich gemacht werden; es bedarf dazu nichts, als daraus das Dialektische und Vernünftige wegzulassen⟦.⟧[74]

Das kann als verwirrend empfunden werden. Wenn die Verstandeslogik in der spekulativen enthalten ist, enthält dann die spekulative Logik auch den Satz vom ausgeschlossenen Dritten? Das scheint mir keinen rechten Sinn zu ergeben.

Ich will Hegels Worten nicht zuviel Bedeutung beilegen, aber tatsächlich zeigt sich hier ein Problem allgemeiner Art. So ist zum Beispiel die

[73] [25], S. 276. Vgl. oben S 94: Hegel über den Dogmatismus in der Metaphysik.
[74] [25], S. 195 f.

intuitionistische Logik auf der einen Seite ein Teilsystem der klassischen, auf der anderen läßt sich aber die klassische Logik innerhalb der intuitionistischen interpretieren, d.h. man kann eine Vorschrift für eine Übersetzung von Formeln derart angeben, daß die Übersetzung einer beweisbaren Formel der klassischen Logik wieder in der intuitionistischen Logik beweisbar ist. Auf diese Weise ergibt sich ein logischer Raum sozusagen *unterhalb* der klassischen Logik. Damit ist die intuitionistische Logik in dem Sinne *reicher* als die klassische Logik, als sie über eine stärkere Aussagekraft verfügt, die es zum Beispiel erlaubt, die Church-Turing-These auf der Objektebene als Axiom widerspruchsfrei zu formulieren.

Um die uneingeschränkte Abstraktion zulassen zu können, ohne daß jede Formel beweisbar wird, muß von den Axiomen der klassischen Aussagenlogik etwas weggelassen werden. In diesem Sinne geht das, was ich weiter unten als „dialektische Logik“ bezeichnen werde, aus der Verstandeslogik, d.h. der klassischen Logik (mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten), hervor, indem alle Sätze des Verstandes weggelassen werden, die eine strikte Zweiwertigkeit postulieren. Die Frage ist natürlich, was alles zu diesen Sätzen des Verstandes gehört, und insbesondere, ob es reicht, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus der Liste der Axiome zu streichen.

Nach dem Gesagten kann man die Sache aber auch so sehen, daß hinsichtlich dessen, was als *wahr* erachtet wird, in der klassischen Logik alles *Vernünftige* ausgeschlossen wird, insbesondere natürlich die Widersprüche der unbeschränkten Begriffsbildung. In diesem Sinne wäre dann die klassische Logik die *ärmere* Logik. Im folgenden werde ich aus axiomatischer Sicht sagen, daß gewisse Axiome oder Schlußregeln aufgegeben werden müssen, um in den Genuß der uneingeschränkten Abstraktion zu gelangen; was man auch einfach so formulieren kann: Weniger ist mehr bzw. weniger Axiome erlauben (potentiell) mehr Differenzierung, und damit Inhalt.

Eine Einschränkung der klassischen Logik kann auf verschiedene Weisen unternommen werden, wie beispielsweise durch ein Hinzufügen von nicht-klassischen *Wahrheitswerten* zu den beiden klassischen Werten „wahr“ und „falsch“, oder eine Preisgabe klassischer Axiome. Derartige Einschränkungen taugen nicht immer für eine widerspruchsfreie Zulassung der uneingeschränkten Abstraktion. Entsprechend gibt es Autoren, die glauben, daß es nicht ausreicht, das *Tertium non datur* aufzugeben, um zu einer Logik zu gelangen, die eine widerspruchsfreie Zulassung der uneingeschränkten Abstraktion erlaubt. Als Begründung wird mitunter auf die intuitionistische Logik verwiesen, in der das *Tertium non datur* nicht gilt, die uneingeschränkte Abstraktion aber trotzdem zur Inkonsistenz führt und dazu, daß jede Formel beweisbar ist. Das Problem dabei ist, was man unter Preisgabe des *Tertium non datur* versteht. Es reicht nicht, irgendein Axiomensystem der klassischen Logik herzunehmen, in welchem die Formel $A \vee \neg A$ als Axiom auftritt, und das dann aus der Liste zu streichen.[75] Etwas pointierter könnte man sagen: Die Preisgabe eines logischen Gesetzes ist Glücksache, und es gibt eine Menge Pechvögel.

Die Auffassung, daß es praktisch unmöglich sei, oder zumindest sehr schwierig, die Logik so einzuschränken, daß uneingeschränkte Abstraktion zugelassen werden kann, ist umso erstaunlicher, als es eine lächerlich einfache Möglichkeit gibt, zumindest aus technischer Sicht, wenn man nur über ein bißchen Hintergrundwissen zu Gentzens Sequenzenkalkül verfügt. Die Grundeinsicht dieser Strategie lautet folgendermaßen:

Schnitteliminierung ohne Zusammenziehung erfordert keinen Rückgriff auf die Komplexität der Schnittformel.

Anders gesagt, die Schnittregel im sogenannten *Idealkalkül*[76] ohne Zusammenziehungen läßt sich leicht als überflüssig nachweisen, womit man einen Konsistenzbeweis erhält, und zwar mit einer einfachen Induktion. Diese Tatsache stellt auch eine Verbindung zur theoretischen Informatik her: Girards Ansatz zu einer *logic of polytime* basiert auf eben dieser Einsicht in die Komplexität der Schnitteliminierbarkeit der Logik ohne Zusammenziehungen.[77]

Es wird jetzt nötig, eine formale Sprache und einen formalen Beweisbegriff als Bezugsrahmen für die weiteren Überlegungen festzulegen.[78]

Als Grundzeichen haben wir

1. freie Variablen, mitgeteilt durch a, b, a_1, $\ldots$;
2. gebundene Variablen, mitgeteilt durch x, y, z, x_1, $\ldots$;

[75] Vgl. meine Bemerkungen in [37], S. 1558 ff, 113.16.

[76] Was die Geschichte der Bezeichnung „Idealkalkül“ angeht, so verweisen Fraenkel et al. [13], S. 155, auf den Artikel von Hermes und Scholz [31].

[77] Vgl. meine Bemerkungen in [38], S. 671.

[78] Notgedrungen sind die folgenden Angaben knapp. Im wesentlichen folge ich der Terminologie von [37], § 12.

3. als Hilfszeichen runde Klammern;
4. als logische Zeichen die Konstanten $\subseteq$ (Inklusion), $\in$ (Element) und den λ-Operator.

Wie üblich wird ein Term bzw. eine Formel, die keine freien Variablen enthält, als *geschlossen* bezeichnet.

Was die logischen Konstanten angeht, so ist dies ist ein sparsames Fundament. Abgesehen davon, daß dadurch beweistheoretische Untersuchungen erleichtert werden, soll auch der Ausdrucksfähigkeit der uneingeschränkten Abstraktion Raum zur Entfaltung gelassen werden.

Terme und Formeln werden nun auf übliche Weise simultan definiert:

1. Jede freie Variable ist ein Term.
2. Sind s und t Terme, so sind $(s \subseteq t)$ und $s \in t$ Formeln.
3. Wenn t ein Term ist, $\mathfrak{F}[t]$ eine Formel und x eine gebundene Variable, die nicht in $\mathfrak{F}$ vorkommt, dann ist $\lambda x\, \mathfrak{F}[x]$ ein Term.

Ich werde r, s, t als Mitteilungszeichen für Terme gebrauchen, A, B, C für Formeln, große griechische Buchstaben Γ, Π und Θ für Folgen von Formeln, und $\Gamma[A]$, zum Beispiel, um *ein bestimmtes* Vorkommnis einer Formel A in einer Folge von Formeln anzuzeigen, und $\Gamma[\,]$, um anzuzeigen, daß ein bestimmtes Vorkommnis einer Formel gestrichen worden ist. *Nennformen* sind wie in [51], S. 1, definiert; sie werden durch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}_1$, usw. mitgeteilt. Alle Mitteilungszeichen können auch indiziert gebraucht werden. Eine Nennform $\mathfrak{F}$ wird als *erster Stufe* bezeichnet, wenn das Nennzeichen $*_1$ nirgends in $\mathfrak{F}$ auf der linken Seite von $\in$ vorkommt, d.h. die Folge $*_1 \in$ kommt nirgends in $\mathfrak{F}$ vor.

Der Einfachheit halber werde ich λA für $\lambda x\, A$ schreiben, wenn x nicht in A vorkommt. λA wird dann auch als *leere Abstraktion* bezeichnet.

Wenn Γ eine Folge von Formeln ist und A eine Formel, dann heißt $\Gamma \Rightarrow A$ eine *Sequenz*. Ich schreibe $\Gamma, [A]^{\cdot \mathrm{n}}, \Pi \Rightarrow C$ für $\Gamma, A, \dots A, \Pi \Rightarrow C$, wenn $A, \dots, A$ eine Folge von n Vorkommnissen der Formel A ist.

Die Schlußregeln in Sequenzenform für $\in$ sind:[79]

$$\text{links}: \quad \frac{\mathfrak{F}[t], \Gamma \Rightarrow C}{t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Gamma \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{rechts}: \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]}{\Gamma \Rightarrow t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]}$$

und die für $\subseteq$:

[79] $\in$-Schlüsse werden oft auch „λ-Schlüsse“ genannt.

$$\text{links}: \quad \frac{\Gamma \Rightarrow r \in s \qquad r \in t, \Pi \Rightarrow C}{s \subseteq t, \Gamma, \Pi \Rightarrow C} \qquad \text{rechts}: \quad \frac{a \in s, \Gamma \Rightarrow a \in t}{\Gamma \Rightarrow s \subseteq t}$$

mit der Variablenbedingung: die freie Variable a (*Eigenvariable*) darf nicht in der Untersequenz auftreten.

Schlüsse gemäß dieser vier Regeln werden als *logische Zeichen Grundschlüsse* bezeichnet.

Ein *Schnitt* ist ein Schluß nach dem Schema

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C \qquad \Pi[C] \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi[\,] \Rightarrow B},$$

wobei C als *Schnittformel* bezeichnet wird.

Strukturschlußregeln sind Verdünnungen, Vertauschungen und Zusammenziehungen:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C} \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow C} \quad \text{und} \quad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}.$$

Die formale Theorie, die aus den vorgenannten Regeln mit den üblichen Grundsequenzen ($A \Rightarrow A$) besteht, heißt $\mathbf{LJ}_\lambda$. $\mathbf{LJ}_\lambda$ ist die intuitionistische Version des sogenannten *Idealkalküls* und erlaubt, genauso wie der volle klassische Kalkül, die Beweisbarkeit jeder beliebigen Formel erlaubt (*Trivialität*).

Zum Beweis führe ich die Implikation als eine definierte logische Konstante ein:

$$A \to B :\equiv \lambda A \subseteq \lambda B. \tag{5.1}$$

Schlüsse gemäß folgender Schemata können nun als $\mathbf{LJ}_\lambda$-herleitbar nachgewiesen werden:

$$\text{links}: \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Pi \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow C} \qquad \text{rechts}: \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}.$$

Im Fall der linken Regel geht das folgendermaßen:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow r \in \lambda A} \qquad \dfrac{B, \Pi \Rightarrow C}{r \in \lambda B, \Pi \Rightarrow C}}{\lambda A \subseteq \lambda B, \Gamma, \Pi \Rightarrow C}.$$

Damit läßt sich nun ein äußerst sparsamer Beweis der Paradoxie von Curry in $\mathbf{LJ}_\lambda$ führen. Es sei $\mathrm{C} :\equiv \lambda x(x \in x \to A)$, wobei A eine beliebige Formel sein darf:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathrm{C}\in\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C}\in\mathrm{C} \qquad A \Rightarrow A}{\mathrm{C}\in\mathrm{C} \to A, \mathrm{C}\in\mathrm{C} \Rightarrow A}\ \to\text{-links}}{\mathrm{C}\in\mathrm{C}, \mathrm{C}\in\mathrm{C} \Rightarrow A}\ \in\text{-links}}{\mathrm{C}\in\mathrm{C} \Rightarrow A}\ \text{Zusammenziehung}$$

und weiter:

$$\cfrac{\cfrac{\mathrm{C}\in\mathrm{C} \Rightarrow A}{\Rightarrow \mathrm{C}\in\mathrm{C} \to A}\ \to\text{-rechts}}{\Rightarrow \mathrm{C}\in\mathrm{C}}\ \in\text{-rechts}\,.$$

Durch einen Schnitt erhält man $\Rightarrow A$, wobei A nach Definition von C eine beliebige Formel sein kann. Damit haben wir die Behauptung bewiesen, daß $\mathbf{LJ}_\lambda$ trivial ist.

Bei einem derart einfachen Beweis bleiben nicht viele Möglichkeiten, die Logik einzuschränken: außer der Abstraktion sind nur Implikation, Zusammenziehung und Schnitt beteiligt.

Die Möglichkeit einer Einschränkung der Abstraktion wird von den modernen axiomatischen Mengenlehren genutzt. Ein solches Vorgehen verträgt sich aber nicht mit der Idee einer Begründung der Metaphysik als Logik.[80] Die Implikation ist eine logische Konstante, hier noch dazu auf der Grundlage von $\subseteq$ *definiert*, so daß eine Strategie, die hier ansetzen würde, eine ganze Reihe von weiteren Einschränkungen nach sich ziehen würde. Zusammenziehung und Schnitt sind sogenannte Strukturschlußregeln. Es liegt in der Natur der Schnittregel, daß sie von einem Widerspruch zur Trivialität führt. Ohne eine Form der Schnittregel gibt es also keine Trivialität. Das machen sich die sogenannten *parakonsistenten* Logiken zunutze: Widersprüche können geduldet werden, weil sie nicht zur Trivialität führen.

Offensichtlich spielt die Zusammenziehung in dem obigen Beweis eine wichtige Rolle. So stellt sich die Frage, ob eine Preisgabe der Zusammenziehungsregel ausreichen würde, um die uneingeschränkte Abstraktion widerspruchsfrei zulassen zu können? Tatsächlich folgt aus der oben genannten Grundeinsicht, daß Schnitteliminierung ohne Zusammenziehungen keinen Rückgriff auf die Komplexität der Schnittformel erfordert, ziemlich unmittelbar: Ohne Zusammenziehungen ist die Schnittregel auch

[80] [1] scheint eine derartige Linie zu verfolgen, aber es ist mir nicht gelungen, in seinem Werk mehr als nur eine idiosynkratische Formulierung der Ergebnisse der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre zu finden.

bei uneingeschränkter Abstraktion eliminierbar. Die formale Theorie, die aus $\mathbf{LJ}_\lambda$ entsteht, wenn als Strukturschlüsse keine Zusammenziehungen mehr, sondern nur noch Verdünnungen und Vertauschungen zugelassen werden, heißt $\mathbf{L^iD}_\lambda$.[81] Dann ist zu zeigen: Was immer mithilfe von Schnitten in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar ist, kann auch ohne Schnitt bewiesen werden.

Die Bedeutung der Schnitteliminierbarkeit liegt in der Konsequenz für die Widerspruchsfreiheit. Man kann sich leicht überzeugen, daß die leere Sequenz $\Rightarrow$ nicht ohne Schnitt $\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar sein kann: Sie ist weder eine Anfangssequenz noch die Untersequenz eines Grundschlusses. Falls ein Widerspruch herleitbar wäre, so wäre mit Schnitt auch die leere Sequenz herleitbar:[82]

$$\dfrac{\Rightarrow \neg A \qquad \dfrac{\Rightarrow A}{\neg A \Rightarrow}}{\Rightarrow}\;.$$

Auf den eigentlichen Beweis der Schnitteliminierbarkeit kann hier nicht eingegangen werden, da er den Rahmen sprengen würde, aber der wesentliche Punkt soll zumindest angedeutet werden.

Klassischerweise erfordert ein Schnitteliminierungsbeweis eine Induktion nach der Länge der Schnittformel. Uneingeschränkte Abstraktion steht dem im Weg: die Länge einer Formel $\mathfrak{F}[t]$ kann länger sein als die von $t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]$, obwohl es auf den ersten Blick nicht so aussehen mag. Man nehme z.B. Russells Klasse: $\mathfrak{F}[t]$ entspricht dann der Formel $\lambda x(x \notin x) \notin \lambda x(x \notin x)$ und $t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]$ der Formel $\lambda x(x \notin x) \in \lambda x(x \notin x)$. Der relevante $\in$-Schluß hat dann beispielsweise folgende Gestalt:

$$\dfrac{\lambda x(x \notin x) \notin \lambda x(x \notin x), \Gamma \Rightarrow C}{\lambda x(x \notin x) \in \lambda x(x \notin x), \Gamma \Rightarrow C}\;.$$

Deshalb darf die übliche Strategie des „Nach-oben-Verschiebens-des-Schnittes“ nicht von der Verkürzung der Schnittformel abhängen. Das

[81] Natürlich gibt es auch äquivalente Formulierungen in anderen Kalkülarten, beispielsweise im sogenannten Hilbert-Frege-Stil (axiomatisch), auf die ich hier aber nicht eingehen will. Eine Behandlung der dazu benötigten Techniken findet sich in [37], §§ 16 und 17.

[82] Da in der Formulierung von $\mathbf{L^iD}_\lambda$ ein Negationszeichen fehlt, sieht das in der Praxis etwas komplizierter aus: Anstelle der leeren Sequenz muß man eine Sequenz minimaler Länge hernehmen, wie etwa $\Rightarrow a \in a$, die nachweislich nicht ohne Schnitt beweisbar sein kann.

ist aber durch die Preisgabe der Zusammenziehungen erreicht worden: Eine Induktion nach der Anzahl der logische Zeichen Schlüsse reicht aus.

Ich will versuchen, das etwas für den Fall zu verdeutlichen, daß die Schnittformel C die Form $t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]$ hat. In diesem Fall sieht der Schnitt folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]}{\Gamma \Rightarrow t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}[t], \Pi \Rightarrow C}{t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Pi \Rightarrow C}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ \text{Schnitt}\,.$$

Nun läßt sich ein Schnitt schon mit den Obersequenzen ausführen, wodurch wir eine gewisse Reduktion erreicht haben:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \mathfrak{F}[t], \Pi \Rightarrow C\end{matrix}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ \text{Schnitt}\,.$$

Was hier reduziert worden ist, ist die gesamte Länge der Herleitung und nicht notwendigerweise der Schnittformel; letztere kann länger geworden sein — das kommt auf die Form von $\mathfrak{F}$ an.

Diese Strategie reicht jedoch nicht mehr aus, wenn Zusammenziehungen erlaubt sind. Dann kann folgende Situation entstehen:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]}{\Gamma \Rightarrow t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}[t], t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Pi \Rightarrow C}{t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Pi \Rightarrow C}}{t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Pi \Rightarrow C}\ \text{Zusammenziehung}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ \text{Schnitt}\,.$$

Um einen derartigen Schnitt zu reduzieren, wird üblicherweise folgende Strategie benutzt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x]} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \mathfrak{F}[t], t \in \lambda x\, \mathfrak{F}[x], \Pi \Rightarrow C\end{matrix}}{\mathfrak{F}[t], \Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ \text{Schnitt}}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ \text{Schnitt}}{\text{evtl. Zusammenziehungen}}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow C}\,.$$

Hier hat, wie vorher, der erste Schnitt eine geringere Komplexität der Herleitung. Für den zweiten Schnitt muß jedoch ein Teil der Herleitung ($\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]$) ein zweites Mal benutzt werden, und so vergrößert sich die Komplexität des zweiten Schnitts (und der gesamten Herleitung). Für den zweiten Schnitt bräuchten wir daher ein Komplexitätsmaß, das von dem der Herleitung unabhängig ist, wie eben die Länge der Schnittformel. Aber letztere ist im vorliegenden Fall nicht unbedingt reduziert worden, und das macht die ganze Aktion wertlos, was uns allerdings nicht überraschen sollte, da wir ja wissen, daß die Schnitteliminierung im vorliegenden Fall unmöglich ist.

Mit anderen Worten, wenn es keine Zusammenziehungsregeln (auch nicht versteckt, d.h. integriert in die logische Zeichen Schlußregeln!) gibt, kann die Schnitteliminierbarkeit (bei entsprechender Form der Grundschlußregeln) ohne Rückgriff auf die Länge der zur Diskussion stehenden Schnittformel bewiesen werden. Daran liegt es, daß Logik ohne Zusammenziehungen so sicher vor allen Antinomien ist, die durch uneingeschränkte Abstraktion erzeugt werden.[83]

Das reicht aus, die üblichen (intuitionistischen Versionen der) Schlußregeln aller gängigen logischen Konstanten zu erhalten. Hier ist eine Liste von Definitionen, auf die ich gelegentlich zurückgreifen werde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &:\equiv \lambda x(x \subseteq x) \quad \text{(Allmenge)},\\
\bigwedge x\, \mathfrak{F}[x] &:\equiv \mathcal{V} \subseteq \lambda x\, \mathfrak{F}[x] \quad \text{(Allquantor)},\\
\bot &:\equiv \bigwedge x(\mathcal{V} \subseteq x) \quad \text{(falsum)},\\
\neg A &:\equiv A \to \bot \quad \text{(Negation)},\\
\emptyset &:\equiv \lambda\bot \quad \text{(Leermenge)},\\
\top &:\equiv \neg\bot \quad \text{(verum)},\\
\bigvee x\, \mathfrak{F}[x] &:\equiv \bigwedge y(\bigwedge x(\mathfrak{F}[x] \to \lambda\top \subseteq y) \to \lambda\top \subseteq y) \quad \text{(Existenz)},\\
s \equiv t &:\equiv \bigwedge y(s \in y \to t \in y) \quad \text{(Identität)},\\
A \mathbin{\square} B &:\equiv \bigwedge x((A \to (B \to \lambda\top \subseteq x)) \to \lambda\top \subseteq x), \quad \text{(a-Konjunktion)},\\
A \wedge B &:\equiv \bigwedge x(\bigwedge y(\lambda A \in y \to (\lambda B \in y \to x \in y)) \to \lambda\top \subseteq x)\\
&\qquad\qquad \text{(m-Konjunktion)},
\end{aligned}$$

[83] In Abschnitt 9 werden wir sehen, daß sich das nicht auf die klassischen Beschreibungsoperatoren wie ε, μ und ι ausdehnen läßt.

$$
\begin{aligned}
A \vee B &:\equiv \bigwedge y((A \to \lambda\top \subseteq y) \wedge (B \to \lambda\top \subseteq y) \to \lambda\top \subseteq x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(m-Disjunktion)}, \\
\Lbrace s \Rbrace &:\equiv \lambda x(s \equiv x) \quad \text{(exklusive Einermenge)}, \\
\Lbrace s, t \Rbrace &:\equiv \lambda x(x \equiv s \vee x \equiv t) \quad \text{(exklusive Paarmenge)}, \\
A \leftrightarrow B &:\equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \quad \text{(logische Äquivalenz)}, \\
s = t &:\equiv \bigwedge x(x \in s \leftrightarrow x \in t) \quad \text{(Gleichheit)}, \\
\{s\} &:\equiv \lambda x(x = s) \quad \text{(inklusive Einermenge)}, \\
\{s, t\} &:\equiv \lambda x(x = s \vee x = t) \quad \text{(inklusive Paarmenge)}, \\
\langle s, t \rangle &:\equiv \{\{\{s\}, \emptyset\}, \{\{t\}\}\} \quad \text{(inklusives geordnetes Paar)}, \\
\lAngle s, t \rAngle &:\equiv \Lbrace \Lbrace \Lbrace s \Rbrace, \emptyset \Rbrace, \Lbrace \Lbrace t \Rbrace \Rbrace \Rbrace \quad \text{(exklusives geordnetes Paar)}, \\
\lambda xy\, \mathfrak{F}[x, y] &:\equiv \lambda z \bigvee x \bigvee y(z \equiv \lAngle x, y \rAngle \mathbin{\square} \mathfrak{F}[x, y]) \quad \text{(zweistellige Abstraktion)}, \\
\complement &:\equiv \lambda xy(y = \lambda z(z \notin x)) \quad \text{(Komplement)}, \\
st &:\equiv \lambda x(\lAngle t, x \rAngle \in s) \quad \text{(Nachbereich eines Arguments)}, \\
s\llbracket t \rrbracket &:\equiv \lambda x \bigwedge y(\lAngle t, y \rAngle \in s \to x \in y) \quad \text{(Anwendung)}, \\
s \cup t &:\equiv \lambda x(x \in s \vee x \in t) \quad \text{(m-Vereinigung)}, \\
0 &:\equiv \emptyset \quad \text{(Null)}, \\
s' &:\equiv s \cup \{s\} \quad \text{(Nachfolger)}, \\
s \sqcap t &:\equiv \lambda x(x \in s \mathbin{\square} x \in t) \quad \text{(a-Durchschnitt)}.
\end{aligned}
$$

Ein Großteil dieser Definitionen wird mehr oder weniger vertraut sein.[84] Eine Unterscheidung zwischen „a"- und „m"-Versionen von Konjunktion usw. empfiehlt sich angesichts der unterschiedlichen Behandlung der Annahmen: a-Konjunktion akkumuliert die Annahmen, m-Konjunktion bildet ihren kleinsten gemeinsamen Nenner, sozusagen. Eine Unterscheidung zwischen *exklusiven* und *inklusiven* Versionen der Einermenge usw. wird durch die Unterscheidung von Gleichheit und Identität motiviert. Besondere Erwähnung verdienen vielleicht noch die Operationen *Nachbereich eines Arguments* und *Anwendung*. st gibt den Wertebereich von s für

[84] Die Symbole $\bigwedge$ für den Allquantor und $\bigvee$ für den Existenzquantor scheinen aus der Mode gekommen zu sein, aber sie haben den Vorteil einer Nähe zu den Symbolen $\wedge$ und $\vee$, eine Nähe, die ich im Hinblick auf eine gewisse Parallelität im Fall der alternativen Konjunktion $\mathbin{\square}$ und des Notwendigkeitsoperators $\Box$, die weiter unten eingeführt werden, erhalten möchte.

das Argument t. Für den Fall, daß s eine Funktion ist, gibt st die Einermenge des Funktionswertes für das Argument t und $s[\![t]\!]$ den Funktionswert selbst. Ansonsten erhält man, beispielsweise, $\emptyset[\![s]\!] = \mathcal{V}$ und $\mathcal{V}[\![s]\!] = \emptyset$, hingegen $\emptyset s = \emptyset$ und $\mathcal{V}s = \mathcal{V}$. Was diese beiden Operationen jedoch gemeinsam haben, ist, daß sie so hübsch den typentheoretischen Vorstellungen von einer korrekten Syntax der Sprache zuwiderlaufen. Deshalb wird es auch nicht überraschen, daß sie sich für die Erzeugung von Paradoxien der Selbstbezüglichkeit eignen. Das sieht man schön an folgendem Term:

$$\phi :\equiv \lambda xy(xx = 0)\,.$$

In einem ersten Schritt läßt sich dafür zeigen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi\phi = 0 \Rightarrow \phi\phi = 0}{\phi\phi = 0 \Rightarrow \langle \phi, a\rangle \in \phi}}{\phi\phi = 0 \Rightarrow a \in \phi\phi} \qquad a \in 0 \Rightarrow}{a \in \phi\phi \rightarrow a \in 0, \phi\phi = 0 \Rightarrow}}{a \in \phi\phi \leftrightarrow a \in 0, \phi\phi = 0 \Rightarrow}}{\phi\phi = 0, \phi\phi = 0 \Rightarrow}}{\phi\phi = 0 \Rightarrow}\ \text{Zusammenziehung}\,.$$

Damit erhält man weiter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi\phi = 0 \Rightarrow}{\langle \phi, a\rangle \in \phi \Rightarrow a \in 0}}{a \in \phi\phi \Rightarrow a \in 0}}{\Rightarrow a \in \phi\phi \rightarrow a \in 0} \qquad \Rightarrow a \in 0 \rightarrow a \in \phi\phi}{\Rightarrow a \in \phi\phi \leftrightarrow a \in 0}}{\Rightarrow \phi\phi = 0}\ ,$$

somit einen Widerspruch.

6. Von der Selbstbezüglichkeit zur Fixpunkteigenschaft

Mit den Mitteln, die im vorigen Abschnitt zur Verfügung gestellt worden sind, läßt sich das Thema der Selbstbezüglichkeit zur Fixpunkteigenschaft ausdehnen. In Abschnitt 3 habe ich Russells Antinomie als Beispiel für

Selbstbezüglichkeit angeführt. Aber Selbstbezüglichkeit ist damit gerade erst berührt; das Beispiel der Russellschen Antinomie kann dahingehend verallgemeinert werden, daß es zu jeder einstelligen Aussageform $\mathfrak{F}$ einen *Fixpunkt* gibt, d.h. eine Formel derart, daß: $\mathrm{R}_{\mathfrak{F}} :\equiv \{x : \mathfrak{F}[x \in x]\}$ und man erhält

$$\mathrm{R}_{\mathfrak{F}} \in \{x : \mathfrak{F}[x \in x]\} \leftrightarrow \mathfrak{F}[\mathrm{R}_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{R}_{\mathfrak{F}}]\,,$$

d.h., wenn man $F_{\mathfrak{F}}$ für $\mathrm{R}_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{R}_{\mathfrak{F}}$ schreibt:

$$F_{\mathfrak{F}} \leftrightarrow \mathfrak{F}[F_{\mathfrak{F}}]\,, \tag{6.1}$$

ein hübsches Fixpunktergebnis.

Es ist aber noch eine weitere Verallgemeinerung der Fixpunkteigenschaft möglich, und zwar für Terme.[85] Selbstbezüglichkeit kann man jetzt auf der Grundlage des Terms $\lambda z\,(\langle t, z\rangle \in s)$ herstellen, für den oben die Abkürzung st eingeführt wurde. Es sei nun $g :\equiv \lambda xy\,\mathfrak{F}[xx, y]$ und $f_g :\equiv gg$:[86]

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{F}[gg, a] \Leftrightarrow \mathfrak{F}[f_g, a] \\
\hline
\langle g, a\rangle \in \lambda xy\,\mathfrak{F}[xx, y] \Leftrightarrow \mathfrak{F}[f, a] \\
\hline\hline
a \in \lambda z\,(\langle g, z\rangle \in g) \Leftrightarrow a \in \lambda x\,\mathfrak{F}[f_g, x] \\
\hline
\Rightarrow a \in f_g \leftrightarrow a \in \lambda x\,\mathfrak{F}[f_g, x] \\
\hline
\Rightarrow f_g = \lambda x\,\mathfrak{F}[f_g, x]
\end{array}\;.$$

Das heißt, wir haben eine Fixpunkteigenschaft für Termformen:

$$f_g = \lambda x\,\mathfrak{F}[f_g, x]\,. \tag{6.2}$$

Als Beispiel sei hier ein Fixpunkt für die Einermenge angeführt:[87]

$$\lambda xy\,(xx \equiv y)\lambda xy\,(xx \equiv y)\,.$$

[85] Vgl. [36], S. 382 f.

[86] In [36] habe ich eine Formulierung mithilfe der Anwendungsoperation $s[\![t]\!]$ benutzt, die etwas komplizierter ist, im Endeffekt aber auf dasselbe hinausläuft.

[87] Koch in [32], S. 3, bemüht Aczels Anti-Fundierungsaxiom, um die Existenz eines Fixpunktes für die Einermenge, d.h. eines Objekts f, für das gilt $\{f\} = f$, als Rechtfertigung für die Möglichkeit eines Fixpunktes für die Negation heranzuziehen, und meint dann bezüglich der Negation: „Es sollte sich ohne weiteres ein Fixpunkt denken lassen, in dem Argument und Wert, Eingabe und Ausgabe der Operation zusammenfallen.“ Angesichts der hier bewiesenen Fixpunkteigenschaft ist das ein unnötiger Umweg: Die uneingeschränkte Abstraktion liefert Fixpunkte für alle Aussage- und Termformen.

Es sei $g :\equiv \lambda xy(xx \equiv y)$ und $f :\equiv gg$:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
a \equiv gg \Rightarrow a \equiv f \\
\hline
⟅g, a⟆ \in g \Rightarrow a \equiv f \\
\hline
a \in \lambda x(⟅g, x⟆ \in g) \Rightarrow a \equiv f \\
\hline\hline
a \in gg \Rightarrow a \in ⟅f⟆ \\
\hline
\Rightarrow a \in gg \rightarrow a \in ⟅f⟆
\end{array}
\qquad\qquad
\Rightarrow a \in ⟅f⟆ \rightarrow a \in gg
\end{array} \\
\hline
\Rightarrow a \in gg \leftrightarrow a \in ⟅f⟆ \\
\hline
\Rightarrow gg = ⟅f⟆
\end{array}
\; .
$$

Selbstbezüglichkeit kann nun in der Form der Fixpunkteigenschaft die Gestalt einer einfachen geschlossenen Formel gegeben werden, oder eigentlich zwei, je nachdem, welche der beiden Operationen, Bildbereich oder Anwendung, man dazu hernimmt:

$$\bigwedge x \bigvee y (xy = y) \qquad \text{und} \qquad \bigwedge x \bigvee y (x[\![y]\!] = y)\,.$$

Als ziemlich unmittelbare Konsequenz der Fixpunkteigenschaft erhält man:

$$\neg \bigvee y \bigwedge x (x \neq yx) \qquad \text{und} \qquad \neg \bigvee y \bigwedge x (x \neq y[\![x]\!])\,.$$

Das ist ein bemerkenswertes Ergebnis, das ich nicht zuletzt deshalb ausdrücklich erwähne, weil es der klassischen Auffassung so unversöhnlich entgegengesetzt ist. Nach klassischer Auffassung ist beispielsweise die Komplementbildung $\complement$ eine Operation, für die

$$\bigwedge x (x \neq \complement[\![x]\!])$$

erfüllt ist.

In diesem Zusammenhang will ich auch auf das hinweisen, was Hao Wang „Gödel's paradox" genannt hat.[88] Nach Hao Wang wollte Gödel damit zeigen, daß es keine einfache Lösung für die *intensionalen Paradoxien* gibt. Gödel benutzt eine Funktion E, die folgendermaßen durch Fallunterscheidung definiert wird:

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0\,; \\ 0, & \text{falls } x \neq 0\,. \end{cases}$$

[88] Vgl. 8.6.24–8.6.26 auf S. 279 in [61].

Nun behauptet Gödel, man könne unmittelbar sehen, daß $E(x) \neq x$ für alle x gilt. In Anbetracht der Fixpunkteigenschaft für $\mathbf{L^iD}_\lambda$ kann das jedoch so nicht zutreffen. Ohne eine Form des *Tertium non datur* oder ein äquivalentes klassisches Gesetz kann es nicht gelingen, $E(x) \neq x$ für beliebige x zu beweisen.

Zunächst einmal will ich zeigen, wie man das Resultat $\bigwedge x(E(x) \neq x)$ auf einfache Weise erhalten kann (ohne jedoch zu behaupten, daß es nicht einfacher ginge):

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow a=0\vee a\neq 0 \qquad \dfrac{a=0, E(a)=a\Rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{a\neq 0\Rightarrow E(a)=0 \qquad 0=a\Rightarrow a=0}{a\neq 0, E(a)=a\Rightarrow a=0}}{a\neq 0, a\neq 0, E(a)=a\Rightarrow}}{a\neq 0, E(a)=a\Rightarrow}}{a=0\vee a\neq 0, E(a)=a\Rightarrow}}{E(a)=a\Rightarrow}}{\Rightarrow E(a)\neq a}\,.$$

Offensichtlich wird das *Tertium non datur* darin gebraucht *und* eine Zusammenziehung.

Es mag einfacher gehen, aber sicher nicht ohne eine gewisse Form des *Tertium non datur* oder der Zusammenziehung. Das folgt aus der Definierbarkeit der folgenden Funktion nc in $\mathbf{L^iD}_\lambda$, die ich im Prinzip schon in [36], S. 383, betrachtet habe (allerdings mit einer komplizierteren Definition):

$$nc :\equiv \lambda xy((x=0\wedge y=1)\vee(x\neq 0\wedge y=0))\,.$$

Dafür erhält man ohne Schwierigkeiten:

(6.3) $\qquad t=0\Rightarrow nc[\![t]\!]=1\,,\quad$ und

(6.4) $\qquad t\neq 0\Rightarrow nc[\![t]\!]=0\,,$

d.h. die Definitionsbedingungen von E sind erfüllt.

Aufgrund der Fixpunkteigenschaft gilt weiterhin:

$$\Rightarrow nc[\![f]\!]=f\ .$$

Damit haben wir folgende Situation:

— In $\mathbf{L^iD}_\lambda$ kann eine Funktion nc definiert werden, welche die Definitionsbedingungen von E erfüllt;

— zu jeder einstelligen Termform $\mathfrak{Z}$ gibt es einen Term $f_{\mathfrak{Z}}$ (Fixpunkt bezüglich $\mathfrak{Z}$) derart, daß $\mathfrak{Z}[f] = f$ $\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar ist, d.h. insbesondere für nc: $\mathbf{L^iD}_\lambda \vdash nc\llbracket f \rrbracket = f$; d.h. $\mathbf{L^iD}_\lambda \vdash \neg \bigwedge x\,(nc\llbracket x \rrbracket \neq x)$;

— $\mathbf{L^iD}_\lambda$ ist widerspruchsfrei: die Schnitteliminierbarkeit in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ kann durch einen einfachen Induktionsbeweis (d.h. bis ω) geliefert werden.

Mit anderen Worten, $E(x) \neq x$ für alle x kann keine *unmittelbare* Folgerung der Definition von E sein.

Was passiert dann aber mit dem Fixpunkt f? Aus 6.4 erhält man zuerst

$$\dfrac{\Rightarrow nc\llbracket f \rrbracket = f \qquad f \neq 0 \Rightarrow nc\llbracket f \rrbracket = 0}{f \neq 0 \Rightarrow f = 0}$$

und dann

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow nc\llbracket f \rrbracket = f \qquad f = 0 \Rightarrow nc\llbracket f \rrbracket = 1}{f = 0 \Rightarrow f = 1} \qquad 1 = 0 \Rightarrow \bot}{f = 0, f = 0 \Rightarrow \bot}\ .$$

Offensichtlich würden Zusammenziehungen hier Unheil anrichten. Man könnte dann nämlich wie folgt schließen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f = 0, f = 0 \Rightarrow \bot}{f = 0 \Rightarrow \bot}}{\Rightarrow f \neq 0} \qquad f \neq 0 \Rightarrow f = 0}{\Rightarrow f = 0} \qquad \Rightarrow f = 1}{\Rightarrow 1 = 0}\ .$$

Hier ist wohl der Punkt, wo die Differenz zwischen klassischer und dialektischer Position am deutlichsten zutage tritt:

— in der klassischen Theorie gibt es eine Abbildung g derart, daß $g\llbracket x \rrbracket \neq x$ für alle x gilt;

— in einer dialektischen (höheren) Logik gibt es *keine* Abbildung g, für die immer $g\llbracket x \rrbracket \neq x$ gilt.

Der Punkt ist höchst metaphysisch: Ist es grundsätzlich möglich, die *Welt* (oder das *Universum*) in zwei elementfremde Teile aufzuteilen, deren Vereinigung die gesamte *Welt* ist. Die klassische Position kann dahingehend charakterisiert werden, daß sie diese Frage mit Ja beantwortet (*Tertium non datur*). Die Position, die ich mit meinem Versuch einer Begründung der Metaphysik durch logische Analyse der Selbstbezüglichkeit verfolge, beantwortet die Frage mit Nein. Aufgrund der Fixpunkteigenschaft gibt es einen Term f_{cp} derart, daß das Komplement $\lambda x(x \notin f_{cp})$ von f_{cp} gleich f_{cp} ist. Anders gesagt, der Durchschnitt zwischen dem Fixpunkt f_{cp} und seinem Komplement $\lambda x(x \notin f_{cp})$ ist gleich f_{cp} selbst: $\lambda x(x \notin f_{cp}) \cap f_{cp} = f_{cp}$. Von diesem Fixpunkt kann man nicht zeigen, daß er leer ist, obwohl man auch nicht zeigen kann, daß etwas unter ihn fällt. Die folgenden beiden Beweisfiguren mögen das vermitteln:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \lambda x(x \notin f_{cp}) = f_{cp} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \in f_{cp} \Rightarrow a \in f_{cp} \qquad a \in \emptyset \Rightarrow \bot}{a \in f_{cp} \to a \in \emptyset, a \in f_{cp} \Rightarrow \bot}}{f_{cp} = \emptyset, a \in f_{cp} \Rightarrow \bot}}{f_{cp} = \emptyset \Rightarrow a \notin f_{cp}}}{f_{cp} = \emptyset \Rightarrow a \in \lambda x(x \notin f_{cp})}}{f_{cp} = \emptyset \Rightarrow a \in f_{cp}} \qquad a \in \emptyset \Rightarrow \bot}{a \in f_{cp} \to a \in \emptyset, f_{cp} = \emptyset \Rightarrow \bot}}{f_{cp} = \emptyset, f_{cp} = \emptyset \Rightarrow \bot} \; ,$$

und:

$$\dfrac{\Rightarrow \lambda x(x \notin f_{cp}) = f_{cp} \qquad \dfrac{\dfrac{a \in f_{cp} \Rightarrow a \in f_{cp}}{a \in f_{cp}, a \notin f_{cp} \Rightarrow \bot}}{a \in f_{cp}, a \in \lambda x(x \notin f_{cp}) \Rightarrow \bot}}{a \in f_{cp}, a \in f_{cp} \Rightarrow \bot} \; .$$

7. Fixpunkte I: Definition rekursiver Funktionen

Die Fixpunkteigenschaft legitimiert Definitionspraktiken, die nach herkömmlicher Auffassung logisch unzulässig sind; dazu gehören insbesondere Zirkeldefinitionen. Sie ermöglichen eine Darstellung aller rekursiven Funktionen in der Theorie $\mathbf{L^iD}_\lambda$. Wie das im einzelnen geht, kann in [39], auf den Seiten 101–122, nachgelesen werden. Hier will ich nur auf die verbotene Art der Definition hinweisen.[89]

[89] Die Theorie der partiell-rekursiven Funktionen erlaubt über den Rekursionssatz ein analoges Vorgehen, das sogar mit der klassischen Logik vereinbar ist — allerdings

Als Beispiel für die Definition einer Funktion als Fixpunkt bietet sich folgendes Schema zur Definition der Addition an:

$$
\begin{aligned}
add = \lambda x_1 x_2 x_3 (&(x_2 \equiv 0 \mathbin{\square} x_3 \equiv x_1) \diamond \\
&\qquad \bigvee y \bigvee z \,(x_2 \equiv y' \mathbin{\square} x_3 \equiv z' \mathbin{\square} \langle\langle x_1, y\rangle, z\rangle \in add))\,.
\end{aligned}
$$

Das ist nur als Schema gedacht, um einen Eindruck zu vermitteln. Logische Konstanten wie $=$ und $'$ müssen eventuell variiert werden, um den spezifischen Gegebenheiten eines typenfreien Systems Rechnung zu tragen.

Damit lassen sich dann leicht relevante Eigenschaften der folgenden Art zeigen:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \langle\langle s, 0\rangle, s\rangle \in add\,,\\
&\Rightarrow \langle\langle s, t'\rangle, r'\rangle \in add\,,\\
&\langle\langle s, 0\rangle, t\rangle \in add \Rightarrow t \equiv s\,,\\
&\bigwedge x\,(\langle\langle s, n\rangle, x\rangle \in add \rightarrow x \equiv p), \langle\langle s, n'\rangle, t\rangle \in add \Rightarrow t \equiv p'\,.
\end{aligned}
$$

Dann läßt sich die Addition in vertrauter Form als $s + t :\equiv add[\![s, t]\!]$ einführen, und ihre Rekursionsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow m + 0 = s\,,\\
&\Rightarrow m + n' = (m + n)'\,,
\end{aligned}
$$

können ziffernweise durch metatheoretische Induktion in $\mathbf{L^{i}D}^{Z}_{\lambda}$ bewiesen werden.

Tatsächlich lassen sich auf diese Weise alle primitiv-rekursiven Funktionen ziffernweise repräsentieren, und darüber hinaus auch alle k-rekursiven Funktionen.

Um die allgemein-rekursiven Funktionen ziffernweise repräsentieren zu können, wird noch ein Suchoperator benötigt, der die kleinste Nullstelle einer Funktion f liefert, sofern eine solche existiert, und f für alle kleineren Argumente definiert ist, d.h. Werte in den natürlichen Zahlen besitzt. Dazu wird die Gesamtheit der natürlichen Zahlen nach folgenden Schema als Fixpunkt eingeführt:

nur um den Preis der Zulassung partieller, d.h. nicht überall definierter, Funktionen. Es ist mir nicht klar, wie weit diese Analogie reicht.

$$\mathbf{N} = \lambda x(x \equiv 0 \diamond \bigvee y(y \in \mathbf{N} \,\square\, x \equiv y'))\,.$$

Das liefert zwar keine vollständige Induktion, aber genug, um die relevanten Eigenschaften eines solchen Suchoperators beweisen zu können.

Auf diese Weise können alle rekursiven Funktionen in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ ziffernweise repräsentiert werden, und damit erhält man auch die Unentscheidbarkeit von $\mathbf{L^iD}_\lambda$. Um die Totalität der primitiv-rekursiven Funktionen zu zeigen, braucht man aber schon eine Form der vollständigen Induktion, von der man aufgrund einfacher ordinaler Überlegungen sagen kann,[90] daß sie in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ nicht zu haben ist. Das wird uns weiter unten beschäftigen.

In der theoretischen Informatik, und allgemein in den mathematischen Disziplinen, ist man weniger dogmatisch eingestellt als in der Philosophie, und so mag es nicht weiter verwundern, daß die Logik, die ich hier $\mathbf{L^iD}_\lambda$ genannt habe, heute in der theoretischen Informatik ein beliebtes Forschungsobjekt ist. Ein Grund, weshalb diese Logik für die theoretische Informatik eine besondere Rolle spielt, besteht darin, daß alle in ihr als total beweisbaren Funktionen in polynomialer Zeit berechenbar sind. Das mag für Metaphysiker nicht sonderlich interessant sein, aber es wirft noch einmal ein interessantes Licht auf den Versuch, hier eine „wissenschaftliche Katastrophe“ herbeizureden.

8. Fixpunkte II: die Unverträglichkeit der Extensionalität

Die Fixpunkteigenschaft erlaubt eine Darstellung der allgemein-rekursiven Funktionen auf eher unorthodoxe Weise. Sie hat aber auch andere unorthodoxe Auswirkungen, die zunächst einmal überraschen können. Als erstes will ich zeigen, daß eine einfache Substitutionseigenschaft nicht einmal mehr für Nennformen der ersten Stufe allgemein gilt:

(8.1) $$s = t, \mathfrak{F}[s] \Rightarrow \mathfrak{F}[t]\,.$$

Um das zu sehen, nehme man $\mathfrak{F} :\equiv s = *_1 \,\square\, s = *_1$:

$$s = t, s = s \,\square\, s = s \Rightarrow s = t \,\square\, s = t\,.$$

Da $s = s \,\square\, s = s$ ziemlich trivialerweise gilt, erhält man

$$s = t \Rightarrow s = t \,\square\, s = t\,,$$

[90] Die Widerspruchsfreiheit von $\mathbf{L^iD}_\lambda$ kann durch eine einfache Induktion gezeigt werden. Nach Gödels zweitem Satz kann damit die Induktion in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ nicht beweisbar sein.

d.h. ein Schema der Zusammenziehung für Gleichheitsformeln. Mit

$$\lambda A = \lambda\top \leftrightarrow A$$

erhält man daraus sofort ein Schema der Zusammenziehung für beliebige Formeln:

$$A \Rightarrow A \mathbin{\square} A\,.$$

Damit ist klar, daß 8.1 auch für Nennformen der ersten Stufe nicht mit uneingeschränkter Abstraktion verträglich ist.

Was jedoch gezeigt werden kann: Wenn $\mathfrak{F}$ eine Nennform der ersten Stufe ist, dann gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß

$$[s = t]^{\cdot \mathrm{n}}, \mathfrak{F}[s] \Rightarrow \mathfrak{F}[t] \tag{8.2}$$

$\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar ist.

Wie sieht nun aber die Situation aus, wenn wir die Beschränkung auf Nennformen der ersten Stufe fallen lassen? Die Antwort lautet einfach: Die Fixpunkteigenschaft für Aussageformen macht kurzen Prozeß mit jeder Gleichsetzung von Gleichheit und Identität, auch in der Form einer Regel wie etwa

$$\frac{\Rightarrow \lambda F = \emptyset}{\Rightarrow \lambda F \equiv \emptyset}\,. \tag{8.3}$$

Aufgrund von 6.1 wissen wir, daß es einen Fixpunkt gibt, der

$$F \leftrightarrow \lambda F \equiv \emptyset$$

erfüllt. Nun läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned} &\lambda F \equiv \emptyset \Rightarrow \bot\,, \quad \text{und}\\ &\Rightarrow \lambda F = \emptyset \end{aligned}$$

beide in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar sind,[91] d.h. es gibt einen Term λF derart, daß die

[91] Der Beweis ist ausgeführt in [36], S. 376, sowie [37], S. 1734. Dort habe ich den Term $\mathrm{R}^\circ :\equiv \lambda x(\lambda(x \in x) \equiv \emptyset)$ dafür herangezogen. Dieser Term kann als Variation von $\mathrm{R} :\equiv \lambda x(x \notin x)$ gesehen werden, wenn man sich folgendes klar macht: Der Russellsche Term ist logisch äquivalent zu $\lambda x(\lambda(x \in x) = \emptyset)$. Man braucht also nur das Zeichen $=$ durch $\equiv$ zu ersetzen. Das wird unmittelbar deutlich, wenn man statt der Selbstelementschaft $x \in x$ die Selbstanwendung xx betrachtet und anstelle des Terms $\phi :\equiv \lambda xy(xx = \emptyset)$ von S. 121 den Term $\phi^\circ :\equiv \lambda xy(xx \equiv \emptyset)$ hernimmt: der Beweis von S. 121 geht dann über in einen Beweis von $\phi^\circ\phi^\circ \equiv 0 \Rightarrow$ und $\Rightarrow \phi^\circ\phi^\circ = 0$, und das *ohne* eine einzige Zusammenziehung.

Zulassung einer Schlußregel der Gestalt 8.3 unmittelbar zur Inkonsistenz führen würde.

Mithilfe der Fixpunkteigenschaft 6.2 für Termformen kann dieses Ergebnis noch dahingehend verschärft werden, daß jedes Objekt, das sich überhaupt von irgendeinem anderen Objekt unterscheiden läßt, einen Doppelgänger hat, d.h. ein Objekt, das ihm gleich ist, von dem es sich aber auch unterscheiden läßt.[92]

Was also Quine als „confusion" brandmarkt, ist für die höhere Logik unabdingbar: eine Trennung von Gleichheit und Identität. Als Faustregel kann man davon ausgehen, daß in dem, was analytische Empiristen verteufeln, eine Quelle spekulativer Einsicht verborgen liegt. In diesem Fall: die Morgenröte der Intensionen, die manchen analytischen Philosophen ein Grauen ist.[93]

9. Fixpunkte III: das Versagen der Beschreibung

Die Unverträglichkeit der Extensionalität mit der uneingeschränkten Abstraktion kann schon als Anzeichen dafür gewertet werden, daß auch beim Bezeichnen mit Schwierigkeiten zu rechnen ist, wenn uneingeschränkte Abstraktion zugelassen wird. Die Fixpunkteigenschaft macht auch tatsächlich kurzen Prozeß mit Beschreibungsoperatoren in ihrer klassischen Gestalt. Dies ist am augenfälligsten bei der sogenannten unbestimmten Beschreibung, die sich umgangssprachlich durch die Wendung „was die Eigenschaft A hat" wiedergeben läßt. In der Mathematik, wie auch sonst, ist folgende Art der Argumentation üblich: Angenommen es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}$; es sei p eine solche Zahl, dann gilt offensichtlich $\mathfrak{A}[p]$. In [39], S. 123, habe ich die Unverträglichkeit der unbestimmten Beschreibung (ε-Operator) mit $\mathbf{L^i D}_\lambda$ mit einem lächerlich einfachen Fixpunkt gezeigt.

[92] Cf. [36], S. 385, theorem 8.1.

[93] Falls Quines Neigungen in Vergessenheit geraten sein sollten, will ich hier daran erinnern:

> Intensions are creatures of darkness, and I shall rejoice with the reader when they are exorcised ([44], p. 180.)

Ich schätze mich glücklich, in einer Zeit zu leben, in der sich christliche Sorge um das Seelenheil des Nächsten nicht mehr in der Form von Inquisition, Folter und Scheiterhaufen ausdrückt, bin mir aber nicht sicher, ob ich dem Frieden trauen kann.

Ich will hier nicht viel Aufhebens um den ε-Operator oder seinen nahen Verwandten, den μ-Operator, machen, sondern mich vor allem auf die bestimmte Beschreibung, d.h. den ι-Operator konzentrieren, und das nicht zuletzt, weil sich in den Beweis in [39], S. 126 f, ein hartnäckiger Druckfehler eingeschlichen hat, den ich hier korrigieren will.

In [39] habe ich u.a. die folgenden Unverträglichkeiten bewiesen:

$$\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_{\lambda} \cup \{\bigvee x\,(\mathfrak{F}[x] \wedge \bigwedge y\,(\mathfrak{F}[y] \rightarrow x = y)) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]\} \vdash \bot\,, \text{ und}$$

$$\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_{\lambda} \cup \{\bigvee x\,\mathfrak{F}[x], \bigwedge z_1 \bigwedge z_2\,(\mathfrak{F}[z_1] \Box \mathfrak{F}[z_2] \rightarrow z_1 = z_2) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]\} \vdash \bot\,.$$

Ich folge dem Vorgehen in [39], S. 126, und verbessere nur die Druckfehler.

Man nehme die Nennform

$$\mathfrak{F} :\equiv *_1 \in \{0,1\} \Box \phi \neq *_1 \Box \bigwedge y\,(y \in \{0,1\} \Box y < *_1 \rightarrow \neg(\phi \neq y))\,,$$ [94]

wobei ϕ wie in [39] der Fixpunkt $\phi = \iota x\,\mathfrak{F}[x]$ ist. Durch $\Box$-Beseitigungen ergibt sich daraus sofort $\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]] \Rightarrow \phi \neq \iota x\,\mathfrak{F}[x]$. Damit erhält man:

$$\bigvee x\,(x \in \{0,1\} \Box \phi \neq x \Box \bigwedge y\,(y \in \{0,1\} \Box y < x \rightarrow \neg(\phi \neq y)) \Rightarrow \phi \neq \iota x\,\mathfrak{F}[x]\,.$$

Das weitere Vorgehen ergibt sich aus [39], S. 127, indem zuerst einmal die oberste Formel auf dieser Seite (Zeile 4) durch

$$0 \in \{0,1\}, \phi \neq 0, \bigwedge y\,(y \in \{0,1\} \Box y < 0 \rightarrow \neg(\phi \neq y)) \Rightarrow$$

ersetzt wird. Wie im Beweis von Proposition 3.4 in [39], S. 124, erhält man $\phi \neq 0 \Rightarrow$ und damit $\phi \neq 1 \Rightarrow$. Das wiederum ergibt die Ersetzung der zweiten Formel auf S. 127 (Zeile 6) durch

$$\Rightarrow \bigwedge y\,(y \in \{0,1\} \Box y < 1 \rightarrow \neg(\phi \neq y))\,.$$

Mit $\Rightarrow 1 \in \{0,1\}$ und

$$1 \in \{0,1\}, \phi \neq 1, \bigwedge y\,(y \in \{0,1\} \Box y < 1 \rightarrow \neg(\phi \neq y)) \Rightarrow$$

erhält man daraus durch einen Schnitt $\phi \neq 1 \Rightarrow$, und damit einen Widerspruch.

Damit wird erneut die Frage relevant, was durch den bestimmten Artikel eigentlich bezeichnet wird, Wenn wir zum Beispiel von der leeren Menge sprechen, sprechen wir von $\emptyset$, d.h. $\lambda x(x \neq x)$, und/oder auch von $\lambda x\,(\lambda(x \in x) \not\equiv \emptyset)$? Die beiden sind gleich, aber nicht identisch.[95] Eine

[94] Das letzte y ersetzt das Nennzeichen $*_1$ in [39], S. 126.

[95] Cf. [36], S. 376.

derartige Konstellation wird in den herkömmlichen Ansätzen zum Problem des Bezeichnens gar nicht berücksichtigt. Aber die Situation hat eine auffallende Ähnlichkeit mit derjenigen, die Hegel als seinen Ausgangspunkt in der *Wissenschaft der Logik* mit den Begriffen *Sein* und *Nichts* gewählt hat. Hegel beginnt mit der extensionalen Identität und intensionalen Nichtidentität von zwei Begriffen — Sein und Nichts — und nutzt, von hier ausgehend, diesen intensionalen Unterschied für eine Grundlegung von Kategorien aus. Kein Zweifel, Hegels Argumentation ist hoffnungslos, aber die Idee, daß die uneingeschränkte Begriffsbildung („substantivierte Aussageform") es offensichtlich unmöglich macht, Objekte eindeutig zu bezeichnen, und daß wir so dazu getrieben werden, weitere Verfeinerungen der Bestimmungen vorzunehmen, die aus intensionalen Unterschieden gespeist werden, ist eine herausfordernde Konzeption, die bisher wohl kaum eine ernsthafte Beachtung erfahren hat. Die Unvereinbarkeit von klassischen logischen Prinzipien (*Tertium non datur*, Zusammenziehung), Extensionalität und Beschreibung mit uneingeschränkter Begriffsbildung mag dieser Idee ausreichenden Nachdruck verleihen, um eine Forschung in Richtung intensionaler Bestimmungen zu motivieren. Die Einführung der Modalitäten in [36] war ein bewußter Versuch in diese Richtung. Allgemeiner formuliert, ich hoffe, daß es möglich sein wird, die Gesetze intensionaler Entitäten wie der Modalität, Kausalität, usw. von den Strukturschlußregeln der Gentzenschen Logik gewissermaßen „ablesen" zu können. Aber bis dahin ist noch ein weiter Weg.

10. Die Unverträglichkeit der klassischen Induktion

Anders als bei den bisherigen Unverträglichkeitsresultaten lege ich hier kein direktes Fixpunktergebnis vor, sondern nur einen Beweis der linken Zusammenziehungsregel mithilfe der uneingeschränkten Abstraktion und des klassischen Induktionsschemas. Im Endergebnis läuft das aber auf dasselbe hinaus: Das klassische Induktionsschema ist nicht mit der uneingeschränkten Abstraktion verträglich.[96]

[96] Dieses Ergebnis sollte vor dem Hintergrund einer Bemerkung wie der folgenden gesehen werden:

> Es gibt ⟦...⟧ Beweisverfahren, die ganz unabhängig von irgendwelchen Systemen, denen sie einverleibt werden können, als gültig einsehbar sind. Zu ihnen

Zuerst will ich erklären, was mit dem Ausdruck „klassische Induktion" gemeint ist. Wenn es einen Term $\mathbf{X}$ in der Sprache einer Theorie Σ (in Sequenzenformulierung) der Mengenlehre (oder höheren Logik) gibt, so daß die folgenden (als *Peano-Axiome* bekannten) Bedingungen

$$\text{(X1)} \qquad \Rightarrow 0 \in \mathbf{X}\,,$$

$$\text{(X2)} \qquad s \in \mathbf{X} \Rightarrow s' \in \mathbf{X}\,,$$

$$\text{(X3)} \qquad s \in \mathbf{X}, 0 = s' \Rightarrow\,,$$

$$\text{(X4)} \qquad s \in \mathbf{X}, t \in \mathbf{X}, s' = t' \Rightarrow s = t\,,$$

$$\text{(X5)} \qquad \mathfrak{F}[0], \bigwedge x\,(\mathfrak{F}[x] \to \mathfrak{F}[x']), s \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathfrak{F}[s]$$

Σ-beweisbar sind, so sage ich, daß Σ über *klassische Induktion* verfügt.[97]

Mit X5 erhält man sofort das *klassische Induktionsschema*

$$\text{(X5}'\text{)} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathfrak{F}[0] \qquad \mathit{\Gamma}, \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[a']}{s \in \mathbf{X}, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}$$

mit der üblichen Variablenbedingung: Die Eigenvariable a darf nicht in der Untersequenz auftreten.

Zusammenziehungen für $s \in \mathbf{X}$-Formeln ergeben sich als unmittelbare Konsequenz aus X1, X2, und X5:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow 0 \in \mathbf{X} \qquad \Rightarrow 0 \in \mathbf{X}}{\Rightarrow 0 \in \mathbf{X} \,\square\, 0 \in \mathbf{X}} \qquad \dfrac{\dfrac{a \in \mathbf{X} \Rightarrow a' \in \mathbf{X} \qquad a \in \mathbf{X} \Rightarrow a' \in \mathbf{X}}{a \in \mathbf{X}, a \in \mathbf{X} \Rightarrow a' \in \mathbf{X} \,\square\, a' \in \mathbf{X}}}{a \in \mathbf{X} \,\square\, a \in \mathbf{X} \Rightarrow a' \in \mathbf{X} \,\square\, a' \in \mathbf{X}}}{s \in \mathbf{X} \Rightarrow s \in \mathbf{X} \,\square\, s \in \mathbf{X}}\;.$$

Der Bequemlichkeit halber führe ich eine abgekürzte Schreibweise für relativierte Quantoren ein:

$$\bigwedge\nolimits^{\mathrm{x}} x\, \mathfrak{F}[x] :\equiv \bigwedge x\,(x \in \mathbf{X} \to \mathfrak{F}[x])\,, \quad \text{und}$$
$$\bigvee\nolimits^{\mathrm{x}} x\, \mathfrak{F}[x] :\equiv \bigvee x\,(x \in \mathbf{X} \,\square\, \mathfrak{F}[x])\,.$$

Weiterhin wird folgender Term benötigt:

$$\mathbf{B}^{\circ} :\equiv \lambda x\,(x \equiv 0 \vee \bigvee\nolimits^{\mathrm{x}} y\,(x \equiv y'))\,.$$

gehört etwa die vollständige Induktion⟦.⟧ ([59], S 102.)

[97] Man beachte, daß X1–X4 für $\mathbf{X} \equiv \mathbf{N}^{\circ}$ in $\mathbf{L}^{\mathrm{i}}\mathbf{D}^{\mathrm{Z}}_{\lambda}$ beweisbar sind. Mit anderen Worten, es geht eigentlich nur um X5.

Folgende Sequenzen lassen sich nun in $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$ beweisen:

(B1) $\quad \Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ}$,

(B2) $\quad s \in \mathbf{X} \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ}$,

(B3) $\quad s \in \mathbf{B}^{\circ} \Rightarrow s \in \mathbf{X}$,

(B4) $\quad s \in \mathbf{B}^{\circ} \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ}$,

(B5) $\quad s \in \mathbf{B}^{\circ} \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}$.

Die Beweise machen keine Schwierigkeiten. Ich zeige nur B3 und B5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{s \in \mathbf{X} \Rightarrow s \in \mathbf{X} \qquad \Rightarrow s' \equiv s'}{s \in \mathbf{X} \Rightarrow s \in \mathbf{X} \Box\, s' \equiv s'}}{s \in \mathbf{X} \Rightarrow \bigvee^{\mathrm{x}} y\,(s' \equiv y')}}{s \in \mathbf{X} \Rightarrow s' \equiv 0 \vee \bigvee^{\mathrm{x}} y\,(s' \equiv y')}}{s \in \mathbf{X} \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ}} \,.$$

Unter Einsatz von B3 kann man folgendermaßen fortfahren:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ} \qquad \Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ}}{\Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, 0 \in \mathbf{B}^{\circ}}}{s \equiv 0 \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b \in \mathbf{X} \Rightarrow b' \in \mathbf{B}^{\circ} \qquad b \in \mathbf{X} \Rightarrow b' \in \mathbf{B}^{\circ}}{b \in \mathbf{X}, b \in \mathbf{X} \Rightarrow b' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, b' \in \mathbf{B}^{\circ}}}{b \in \mathbf{X}, b \in \mathbf{X}, s \equiv b' \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}}}{b \in \mathbf{X}, s \equiv b' \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}}}{\bigvee^{\mathrm{x}} y\,(s \equiv y') \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}}}{x \equiv 0 \vee \bigvee^{\mathrm{x}} y\,(s \equiv y') \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}}}{s \in \mathbf{B}^{\circ} \Rightarrow s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box\, s \in \mathbf{B}^{\circ}} \,.$$

Um nun zeigen zu können, wie klassische Induktion mit uneingeschränkter Abstraktion eingesetzt werden kann, um Zusammenziehungen zu erhalten, führe ich den folgenden Term ein (wobei A diejenige Formel ist, für die die Zusammenziehung gezeigt werden soll):

$$\mathring{\rho}_A :\equiv \lambda x_1 x_2 \bigwedge y\,(\langle 0, \lambda A\rangle \in y \Box \bigwedge^{\mathrm{x}} z\,(\langle z', \lambda A \sqcap \lambda A\rangle \in y) \to \langle x_1, x_2\rangle \in y)\,,$$

wobei eine *inklusive* (d.i. gegenüber Ersetzungen offene) Version ρ_A wie folgt definiert ist:

$$\rho_A :\equiv \lambda x_1 x_2 \bigvee^{\mathrm{x}} y \bigvee z\,(y = x_1 \Box\, z = x_2 \Box \langle y, z\rangle \in \mathring{\rho}_A)\,.$$

Damit erhalten wir unmittelbar:

$$\Rightarrow \langle 0, \lambda A\rangle \in \rho_A\,, \quad \text{und}$$
$$\Rightarrow \langle s', \lambda A \sqcap \lambda A\rangle \in \rho_A\,.$$

Als einfache Folgerung davon und den Eigenschaften der Anwendung erhalten wir:

$$\Rightarrow \rho_A[\![0]\!] \subseteq \lambda A\,, \quad \text{und}$$
$$\Rightarrow \rho_A[\![s']\!] \subseteq \lambda A \sqcap \lambda A\,.$$

Ich zeige nur die erste:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \langle 0,\lambda A\rangle \in \rho_A \qquad a\in\lambda A \Rightarrow a\in\lambda A}{\langle 0,\lambda A\rangle\in\rho_A \to a\in\lambda A \Rightarrow a\in\lambda A}}{\bigwedge y\,(\langle 0,y\rangle\in\rho_A\to a\in y)\Rightarrow a\in\lambda A}}{a\in\rho_A[\![0]\!]\Rightarrow a\in\lambda A}}{\Rightarrow a\in\rho_A[\![0]\!]\to a\in\lambda A}}{\Rightarrow \rho_A[\![0]\!]\subseteq\lambda A}\,.$$

Die andere Richtung erfordert eine gewisse „Eindeutigkeit“ (Rechtseindeutigkeit), die eine wohlbekannte Konsequenz der Art und Weise ist, wie der Term $\mathring{\rho}_A$ definiert ist:

$$\Rightarrow \lambda A \subseteq \rho_A[\![0]\!]\,, \quad \text{und}$$
$$\Rightarrow \lambda A \sqcap \lambda A \subseteq \rho_A[\![s']\!]\,.$$

Ich behandle nur den ersten Fall:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow 0=0 \qquad \Rightarrow \lambda A=\lambda A}{\Rightarrow 0=0 \mathbin{\square} \lambda A=\lambda A}}{\Rightarrow (0=0 \mathbin{\square} \lambda A=\lambda A) \vee \bigvee^{\mathrm{x}} y\,(0=y' \mathbin{\square} \lambda A=\lambda A\sqcap\lambda A)}}{\Rightarrow \langle 0,\lambda A\rangle \in \lambda x_1 x_2\,((x_1=0 \mathbin{\square} x_2=\lambda A)\vee \bigvee^{\mathrm{x}} y\,(x_1=y' \mathbin{\square} x_2=\lambda A\sqcap\lambda A))}\,.$$

Der einfacheren Darstellbarkeit halber schreibe ich in den beiden folgenden Beweisfiguren λA^2 anstelle von $\lambda A \sqcap \lambda A$:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
c\in\mathbf{X} \Rightarrow c'=c' \qquad \Rightarrow c'=c' \\ \hline
c\in\mathbf{X} \Rightarrow c\in\mathbf{X} \mathbin{\Box} c'=c'
\end{array}
\qquad \Rightarrow \lambda A^2=\lambda A^2 \\ \hline
c\in\mathbf{X} \Rightarrow c\in\mathbf{X} \mathbin{\Box} c'=c' \mathbin{\Box} \lambda A^2=\lambda A^2 \\ \hline
c\in\mathbf{X} \Rightarrow \bigvee^{x} y\,(c'=y' \mathbin{\Box} \lambda A^2=\lambda A^2)
\end{array} \\ \hline
c\in\mathbf{X} \Rightarrow (c'=0 \mathbin{\Box} \lambda A^2=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(c'=y' \mathbin{\Box} \lambda A^2=\lambda A^2) \\ \hline
c\in\mathbf{X} \Rightarrow \llparenthesis c',\lambda A^2\rrparenthesis\in\lambda x_1x_2\,((x_1=0 \mathbin{\Box} x_2=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(x_1=y' \mathbin{\Box} x_2=\lambda A^2)) \\ \hline
\Rightarrow \bigwedge^{x} z\,(\llparenthesis z',\lambda A^2\rrparenthesis\in\lambda x_1x_2\,((x_1=0 \mathbin{\Box} x_2=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(x_1=y' \mathbin{\Box} x_2=\lambda A^2)))
\end{array}\;.$$

Unter Einsatz von X3 läst sich dann zeigen:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
b=\lambda A \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline
0=0, b=\lambda A \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline
0=0 \mathbin{\Box} b=\lambda A \Rightarrow b=\lambda A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
a\in\mathbf{X}, 0=a' \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline
a\in\mathbf{X}, 0=a', b=\lambda A^2 \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline\hline
a\in\mathbf{X} \mathbin{\Box} 0=a' \mathbin{\Box} b=\lambda A^2 \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline
\bigvee^{x} y\,(0=y' \mathbin{\Box} b=\lambda A^2) \Rightarrow b=\lambda A
\end{array} \\ \hline
(0=0 \mathbin{\Box} b=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(0=y' \mathbin{\Box} b=\lambda A^2) \Rightarrow b=\lambda A \\ \hline
\llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\lambda x_1x_2\,((x_1=0 \mathbin{\Box} x_2=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(x_1=y' \mathbin{\Box} x_2=\lambda A^2)) \Rightarrow b=\lambda A
\end{array}\;.$$

Jetzt werden diese Ergebnisse in der folgenden Beweisfigur verwendet. Um die Darstellung zu erleichtern, wird im folgenden ξ an die Stelle von $\lambda x_1x_2\,((x_1=0 \mathbin{\Box} x_2=\lambda A) \vee \bigvee^{x} y\,(x_1=y' \mathbin{\Box} x_2=\lambda A \sqcap \lambda A))$ treten:

$$\begin{array}{c}
\Rightarrow \llparenthesis 0,\lambda A\rrparenthesis\in\xi \mathbin{\Box} \bigwedge^{x} z\,(\llparenthesis z',\lambda A \sqcap \lambda A\rrparenthesis\in\xi)
\qquad
\begin{array}{c}
\llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\xi \Rightarrow b=\lambda A \qquad a\in\lambda A, b=\lambda A \Rightarrow a\in b \\ \hline
a\in\lambda A, \llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\xi \Rightarrow a\in b
\end{array} \\ \hline
a\in\lambda A, \llparenthesis 0,\lambda A\rrparenthesis\in\xi \mathbin{\Box} \bigwedge^{x} z\,(\llparenthesis z',\lambda A \sqcap \lambda A\rrparenthesis\in\xi) \rightarrow \llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\xi \Rightarrow a\in b \\ \hline
a\in\lambda A, \bigwedge y\,(\llparenthesis 0,\lambda A\rrparenthesis\in y \mathbin{\Box} \bigwedge^{x} z\,(\llparenthesis z',\lambda A \sqcap \lambda A\rrparenthesis\in y) \rightarrow \llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in y) \Rightarrow a\in b \\ \hline
a\in\lambda A, \llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\rho_A \Rightarrow a\in b \\ \hline
a\in\lambda A \Rightarrow \llparenthesis 0,b\rrparenthesis\in\rho_A \rightarrow a\in b \\ \hline
a\in\lambda A \Rightarrow \bigwedge y\,(\llparenthesis 0,y\rrparenthesis\in\rho_A \rightarrow a\in y) \\ \hline
a\in\lambda A \Rightarrow a\in\rho_A[\![0]\!] \\ \hline
\Rightarrow a\in\lambda A \rightarrow a\in\rho_A[\![0]\!] \\ \hline
\Rightarrow \lambda A \subseteq \rho_A[\![0]\!]
\end{array}\;.$$

Damit erhält man unmittelbar:

$$(10.1) \qquad \Rightarrow \rho_A\llbracket 0\rrbracket = \lambda A\,, \text{ und}$$

$$(10.2) \qquad \Rightarrow \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda A \sqcap \lambda A\,.$$

Aus 10.2 wiederum erhält man sofort

$$(10.3) \qquad \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow A \Box A$$

auf folgende Weise:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda A \sqcap \lambda A}{\rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \lambda A \sqcap \lambda A = \lambda\top} \qquad \lambda A \sqcap \lambda A = \lambda\top \Rightarrow A \Box A}{\rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow A \Box A}\,.$$

Das wird etwas weiter unten zur Anwendung kommen.

Jetzt kann ich zeigen, daß aus 10.1 und 10.2 mithilfe von X5′ Zusammenziehungen folgen. Zuerst die „Induktionsbasis“:

$$\dfrac{\Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ} \qquad \dfrac{\Rightarrow \rho_A\llbracket 0\rrbracket = \lambda A \qquad A \Rightarrow \lambda A = \lambda\top}{A \Rightarrow \rho_A\llbracket 0\rrbracket = \lambda\top}}{A \Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket 0\rrbracket = \lambda\top}\,.$$

Als nächstes kommt der „Induktionsschritt“. In einem ersten Schritt erhalten wir $A, s \in \mathbf{B}^{\circ}, \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top$ (um Platz zu sparen, lasse ich hier das indizierte A weg und schreibe einfach nur ρ):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \rho\llbracket 0\rrbracket = \lambda A \quad A, \lambda A = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket 0'\rrbracket = \lambda\top}{A, \rho\llbracket 0\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket 0'\rrbracket = \lambda\top}}{A, s \equiv 0, \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\rho\llbracket b'\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket b''\rrbracket = \lambda\top}{s \equiv b', \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}}{\bigvee^{\mathsf{x}} y(s \equiv y'), \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}}{A, \bigvee^{\mathsf{x}} y(s \equiv y'), \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}}{A, s \in \mathbf{B}^{\circ}, \rho\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}\,.$$

Und weiter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{s \in \mathbf{B}^{\circ} \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ} \qquad A, s \in \mathbf{B}^{\circ}, \rho_A\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}{A, s \in \mathbf{B}^{\circ}, s \in \mathbf{B}^{\circ}, \rho_A\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}}{A, s \in \mathbf{B}^{\circ}, \rho_A\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}}{A, s \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket s\rrbracket = \lambda\top \Rightarrow s' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket s'\rrbracket = \lambda\top}\,.$$

Zusammen, durch Anwendung von X5′, ergibt das:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow 0' \in \mathbf{X} \qquad \dfrac{A \Rightarrow 0 \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket 0 \rrbracket = \lambda\top \qquad A, a \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket a \rrbracket = \lambda\top \Rightarrow a' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket a' \rrbracket = \lambda\top}{0' \in \mathbf{X}, A \Rightarrow 0' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket 0' \rrbracket = \lambda\top}}{A \Rightarrow 0' \in \mathbf{B}^{\circ} \Box \rho_A\llbracket 0' \rrbracket = \lambda\top}}{A \Rightarrow \rho_A\llbracket 0' \rrbracket = \lambda\top} \ .$$

Schließlich kommt ein Schnitt mit 10.3 zur Anwendung:

$$\dfrac{A \Rightarrow \rho_A\llbracket 0' \rrbracket = \lambda\top \qquad \rho_A\llbracket 0' \rrbracket = \lambda\top \Rightarrow A \Box A}{A \Rightarrow A \Box A} \ .$$

Das ergibt dann Zusammenziehungen auf die übliche Weise:

$$\dfrac{A \Rightarrow A \Box A \qquad \dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A \Box A, \Gamma \Rightarrow C}}{A, \Gamma \Rightarrow C} \ .$$

Damit ist gezeigt, daß auch die klassische Induktion nicht mit uneingeschränkter Abstraktion verträglich ist.

11. Die Unverträglichkeit des Auswahlaxioms

Die Unverträglichkeit des ε-Operators (mit dem klassischen ε-Axiom) von Abschnitt 9 kann schon als Hinweis darauf gewertet werden, daß auch das Auswahlaxiom durch die uneingeschränkte Abstraktion in Mitleidenschaft gezogen wird.

Ich habe keinen Fixpunkt, der in unmittelbarer Weise das Auswahlaxiom zu Fall bringt, aber es ist bekannt, daß das Auswahlaxiom auf der Basis einer intuitionistischen Mengenlehre zur Beweisbarkeit des *Tertium non datur* führt.[98] Dieses Argument kann der Situation der zusammenziehungsfreien Logik angepaßt werden.[99]

[98] Vgl. [3], S. 163, wo auf [9] verwiesen wird. Mir scheint [20] jedoch der Sache näher zu kommen.

[99] Ein entsprechendes Argument geht auch für den Auswahloperator ε in der zusammenziehungsfreien Logik durch, aber das interessiert hier kaum, angesichts des Fixpunktarguments in Abschnitt 9.

Die Form des Auswahlaxioms, die im intuitionistischen Fall zur Anwendung kommt, ist

$$\bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[x,y]) \to \bigvee y \bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x\rrbracket])\,.$$

Man kann leicht zeigen, daß das eine klassische Konsequenz des Auswahlaxioms in der Formulierung

$$\bigwedge x \bigvee y\,(\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x,y]) \to \bigvee y \bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x\rrbracket]) \tag{11.1}$$

ist:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{B}[a,b], \mathfrak{A}[a] \Rightarrow \mathfrak{B}[a,b] \\ \hline
\mathfrak{B}[a,b], \mathfrak{A}[a] \Rightarrow \mathfrak{B}[a,b] \\ \hline
\mathfrak{B}[a,b] \Rightarrow \mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,b] \\ \hline
\mathfrak{B}[a,b] \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \Rightarrow \mathfrak{A}[a] \qquad \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y] \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y], \mathfrak{A}[a] \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y], \mathfrak{A}[a] \Rightarrow \mathfrak{B}[a,b], \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,b], \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y] \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]), \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\mathfrak{A}[a] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[a,y] \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[x,y]) \Rightarrow \bigvee y\,(\mathfrak{A}[a] \to \mathfrak{B}[a,y]) \\ \hline
\bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[x,y]) \Rightarrow \bigwedge x \bigvee y\,(\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x,y])
\end{array}\;.$$

Das ist zwar kein intuitionistisch gültiger Beweis, aber es geht ja nur darum, eine Anwendung des klassischen Auswahlaxioms zu finden, aus dem sich intuitionistisch das *Tertium non datur* beweisen läßt.

Für den Fall der zusammenziehungsfreien Logik mit uneingeschränkter Abstraktion muß das noch weiter abgewandelt werden. Die Form des Auswahlaxioms, die hier zur Anwendung kommt, sieht folgendermaßen aus:

$$[\bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \bigvee y\,\mathfrak{B}[x,y])]^{\cdot 2} \to \bigvee y[\bigwedge x\,(\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x\rrbracket^{*}])]^{\cdot 2}\,, \tag{11.2}$$

wobei $s\llbracket t\rrbracket^{*}$ eine *inklusive* (gegenüber Ersetzungen offene) Version der Anwendung ist, die folgendermaßen definiert ist:

$$s\llbracket t\rrbracket^{*} :\equiv \lambda x \bigwedge y\,(\langle t, y\rangle \in s^{*} \to x \in y)\,,$$

wobei wiederum

$$s^* :\equiv \lambda x_1 x_2 \bigvee y_1 \bigvee y_2 (x_1 = y_1 \square x_2 = y_2 \square \langle y_1, y_2 \rangle \in s)$$

definiert ist. Das ist so ausgelegt, daß

$$t_1 = t_2 \Rightarrow s\llbracket t_1 \rrbracket^* = s\llbracket t_2 \rrbracket^* \tag{11.3}$$

$\mathbf{L^i D}_\lambda$-beweisbar ist. Wie im intuitionistischen Fall, handelt es sich auch bei 11.2 um eine klassische Konsequenz der allgmeinen Form 11.1:

$$\begin{array}{c}
\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]) \Rightarrow \bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]) \\
\hline
\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]), \bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]) \Rightarrow [\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*])]^{\cdot 2} \\
\hline
\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]) \Rightarrow [\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*])]^{\cdot 2} \\
\hline
\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, b\llbracket x \rrbracket^*]) \Rightarrow \bigvee y [\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x \rrbracket^*])]^{\cdot 2} \\
\hline
\bigvee y \bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x \rrbracket^*]) \Rightarrow \bigvee y [\bigwedge x (\mathfrak{A}[x] \to \mathfrak{B}[x, y\llbracket x \rrbracket^*])]^{\cdot 2}
\end{array} \, .$$

Um nun zu zeigen, daß 11.2 das Gesetz des *Tertium non datur* impliziert, führe ich zuerst die folgenden beiden Terme ein:

$$\theta :\equiv \lambda x (x = 0 \vee A), \quad \text{und}$$
$$\eta :\equiv \lambda x (x = 1 \vee A).$$

Nun lassen sich leicht

$$\bigwedge x \bigvee y (x = \theta \vee x = \eta \to \bigvee y (y \in x)), \quad \text{und} \tag{11.4}$$
$$\bigvee y \bigwedge x (x = \theta \vee x = \eta \to y\llbracket x \rrbracket^* \in x) \tag{11.5}$$

zeigen.
Zu 11.4.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Rightarrow 0 = 0 \\
\hline
\Rightarrow 0 = 0 \vee A \\
\hline
\Rightarrow 0 \in \theta \\
\hline
a = \theta \Rightarrow 0 \in a \\
\hline
a = \theta \Rightarrow \bigvee y (y \in a)
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\Rightarrow 1 = 1 \\
\hline
\Rightarrow 1 = 1 \vee A \\
\hline
\Rightarrow 1 \in \eta \\
\hline
a = \eta \Rightarrow 1 \in a \\
\hline
a = \eta \Rightarrow \bigvee y (y \in a)
\end{array}
\end{array} \\
\hline
a = \theta \vee a = \eta \Rightarrow \bigvee y (y \in a) \\
\hline
\Rightarrow a = \theta \vee a = \eta \to \bigvee y (y \in a) \\
\hline
\Rightarrow \bigwedge x (x = \theta \vee x = \eta \to \bigvee y (y \in x))
\end{array} \, .$$

Zu 11.5: Mithilfe von 11.4 und dem Auswahlaxiom in der Form

$$\bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \rightarrow \bigvee y(y \in x)) \rightarrow \bigvee y \bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \rightarrow y[\![x]\!]^* \in x)$$

erhält man:

$$\bigvee y \bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \rightarrow y[\![x]\!]^* \in x)\,.$$

Damit sind weiterhin die folgenden Sequenzen beweisbar:

(11.6) $A \Rightarrow \theta = \eta\,,$

(11.7) $a[\![\theta]\!]^* \neq a[\![\eta]\!]^* \Rightarrow \neg A\,,$

(11.8) $a[\![\theta]\!]^* \in \theta, a[\![\eta]\!]^* \in \eta \Rightarrow a[\![\theta]\!]^* \neq a[\![\eta]\!]^* \vee A\,,$

(11.9) $a[\![\theta]\!]^* \in \theta, a[\![\eta]\!]^* \in \eta \Rightarrow A \vee \neg A\,,$

(11.10) $\bigvee y \bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \rightarrow y[\![x]\!]^* \in x) \Rightarrow A \vee \neg A\,,$

(11.11) $\Rightarrow A \vee \neg A\,.$

Zum Beweis betrachte man der Reihe nach:
Zu 11.6. Das Ganze ist symmetrisch und ich zeige nur die eine Richtung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, a = 0 \Rightarrow a = 1 \vee A} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow a = 1 \vee A}}{A, a = 0 \vee A \Rightarrow a = 1 \vee A}}{A, a \in \theta \Rightarrow a \in \eta}}{A \Rightarrow a \in \theta \rightarrow a \in \eta}\,.$$

Zu 11.7. Man nehme 11.6 und 11.3, d.h. die Möglichkeit, gleiche Terme durch einander zu ersetzen:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow \theta = \eta \qquad \theta = \eta \Rightarrow a[\![\theta]\!]^* = a[\![\eta]\!]}{A \Rightarrow a[\![\theta]\!]^* = a[\![\eta]\!]}}{a[\![\theta]\!]^* \neq a[\![\eta]\!]^* \Rightarrow \neg A}\,.$$

Zu 11.8.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
0 = 1 \Rightarrow \\
\hline\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* = 0, a\llbracket\eta\rrbracket^* = 1, a\llbracket\theta\rrbracket^* = a\llbracket\eta\rrbracket \Rightarrow \\
\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* = 0, a\llbracket\eta\rrbracket^* = 1 \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq \llbracket\eta\rrbracket \\
\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* = 0, a\llbracket\eta\rrbracket^* = 1 \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A
\end{array}
\qquad A \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A \\
\hline\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* = 0 \vee A, a\llbracket\eta\rrbracket^* = 1 \vee A \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A \\
\hline\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* \in \theta, a\llbracket\eta\rrbracket^* \in \eta \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A
\end{array}
\end{array} .
$$

Zu 11.9. Man nehme 11.8 und 11.7:

$$
\begin{array}{c}
a\llbracket\theta\rrbracket^* \in \theta, a\llbracket\eta\rrbracket^* \in \eta \Rightarrow a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \Rightarrow \neg A \\
\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \Rightarrow A \vee \neg A
\end{array}
\qquad A \Rightarrow A \vee \neg A \\
\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* \neq a\llbracket\eta\rrbracket^* \vee A \Rightarrow A \vee \neg A
\end{array} \\
\hline
a\llbracket\theta\rrbracket^* \in \theta, a\llbracket\eta\rrbracket^* \in \eta \Rightarrow A \vee \neg A
\end{array} .
$$

Zu 11.10. Man nehme 11.9:

$$
\begin{array}{c}
\Rightarrow \theta = \theta \vee \theta = \eta \qquad a\llbracket\theta\rrbracket^* \in \theta, a\llbracket\eta\rrbracket^* \in \eta \Rightarrow A \vee \neg A \\
\hline\hline
\theta = \theta \vee \theta = \eta \to a\llbracket\theta\rrbracket^* \in \theta, \theta = \theta \vee \theta = \eta \to a\llbracket\eta\rrbracket^* \in \eta \Rightarrow A \vee \neg A \\
\hline\hline
[\bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \to a\llbracket x\rrbracket^* \in x)]^{\cdot 2} \Rightarrow A \vee \neg A \\
\hline
\bigvee y[\bigwedge x(x = \theta \vee x = \eta \to y\llbracket x\rrbracket^* \in x)]^{\cdot 2} \Rightarrow A \vee \neg A
\end{array} .
$$

11.11 ist nun eine unmittelbare Folgerung aus 11.5 und 11.10 mithilfe eines Schnitts.

Da uneingeschränkte Abstraktion nicht mit dem Gesetz des *Tertium non datur* verträglich ist, ist damit auch die Unverträglichkeit (einer Form) des (klassischen) Auswahlaxioms mit der uneingeschränkten Abstraktion gezeigt.

12. Selbstbezüglichkeit im Einsatz: die Definition von Z

Wie die letzten vier Abschnitte zeigen, fordert die Zulassung der uneingeschränkten Abstraktion massive Einschränkungen an klassischen Prinzipien, die grundsätzlich über die Einschränkung der Logik hinausgehen, nämlich:

1. Unterscheidung von Gleichheit und Identität;
2. Preisgabe klassischer Formen der Beschreibung;
3. Preisgabe der klassischen Form der Induktion;
4. Preisgabe des Auswahlaxioms.

All diese Unverträglichkeitsresultate zeigen aus meiner Sicht etwas an, nämlich, daß mit der klassischen Lehrmeinung etwas nicht stimmt. Die klassische Lehrmeinung suggeriert, wir könnten so schließen, „als ob" wir vollständiges Wissen hätten („Gottähnlichkeit" oder „divinisimilitude").

Wir schließen mit realen Annahmen, sprachlichen Gebilden, die ihrerseits auf der Objektebene (evtl. kodiert) in Erscheinung treten können und auf diese Weise Doppeldeutigkeit erzeugen. Wie tragen wir einer solchen Rolle der Annahmen in Regeln für ein logisches Schließen Rechnung? Das heißt im Falle der Zusammenziehungsregel, daß wir in gewisser Weise Buchhaltung führen über unseren Gebrauch der Zusammenziehungsregeln.[100] Mit anderen Worten, ob wir in einem Beweis eine Annahme ein- oder zweimal gebrauchen, soll im Endresultat erkennbar sein.

Das Problem: Wie kann man über Annahmen gleicher Gestalt quantifizieren? D.h., wie kann man ausdrücken, daß eine Formel A mehrmals gebraucht wird, um zu B zu gelangen, ohne sich dabei genau festlegen zu müssen, wie oft A tatsächlich gebraucht wird?

Man betrachte die Reihe:

$$(A \to B) \vee (A \,\square\, A \to B) \vee (A \,\square\, A \,\square\, A \to B) \vee \ldots ,$$

wobei $\square$ eine nicht-kontrahierende Konjunktion ist, d.h. es gilt nicht $A \to A \,\square\, A$. Gesucht ist eine Möglichkeit, $A \,\square^{\mathrm{n}} A$ für eine gewisse Form von natürlichen Zahlen n so ausdrücken zu können, daß

$$A \,\square^0 A \leftrightarrow A$$

$$A \,\square^1 A \leftrightarrow A \,\square\, A$$

$$A \,\square^2 A \leftrightarrow A \,\square\, A \,\square\, A$$

usw. gilt, um schließlich so etwas wie

$$(x)(x \in \mathbf{N} \to (A \,\square^x A)) \tag{12.1}$$

oder

$$(Ex)(x \in \mathbf{N} \,\square\, (A \,\square^x A \to B)) \tag{12.2}$$

[100] Wer sich an die lineare Logik aus der theoretischen Informatik erinnert fühlt, möge sich durch Fußnote 100 auf S. 143 bestätigt sehen.

formulieren zu können. Die intuitive Symbolik $\Box^x$ muß präzise gefaßt werden, deshalb haben auch die Quantoren hier eine intuitive Gestalt (x) und (Ex), damit sie nicht mit den Symbolen eines formalen Systems verwechselt werden.

Dafür müssen eine paar neue Definitionen eingeführt werden. Es geht darum, ausdrücken zu können, daß eine Formel noch einmal zur Verfügung steht. Dazu muß man aber in der Lage sein, über die Gültigkeit von Formeln reden zu können, und dazu, wiederum, braucht man so etwas wie eine *Wahrheitsdefinition*. In einer typenfreien Logik erhält man das leicht:

$$\lambda A \in \{\mathcal{V}\} \leftrightarrow A\,.$$

Natürlich hat diese Wahrheitsdefinition nichts mit Wahrheit zu tun.[101] Alles was ich damit vorhabe, beruht auf den folgenden Festsetzungen:

$I :\equiv \{\mathcal{V}\}$, und
$s^I :\equiv s \sqcap I\,.$

Sie versetzen mich in die Lage, so etwas auszudrücken wie:

$$\lambda A \in I \leftrightarrow A,$$
$$\lambda A \in I^I \leftrightarrow A \Box A,$$
$$\lambda A \in I^{II} \leftrightarrow A \Box A \Box A,$$

usw. Das bringt mich meinem Ziel näher, wenn es mir gelingt, den Ausdruck $A \in I^{IIII}$, zum Beispiel, mit „5 mal A“ zu verknüpfen.

Zu diesem Zweck definiere ich zunächst auf der Metaebene induktiv die Menge $\mathbf{\Psi}$:

I ist ein Element von $\mathbf{\Psi}$.
Wenn x ein Element von $\mathbf{\Psi}$ ist, dann ist auch x^I ein Element von $\mathbf{\Psi}$.

Dann stellt eine weitere induktive Definition eine Korrespondenz her zwischen natürlichen Zahlen und Elementen von $\mathbf{\Psi}$:

[101] Ich will ja gar nicht behaupten, daß Tarskis sogenannte *Wahrheitsdefinition* ein Etikettenschwindel ist, aber es muß klar sein, daß ich nicht viel Aufhebens mache, wenn es darum geht, auf der formalen Ebene eine allgemeine Äquivalenz zwischen einer Aussage A und einer Aussage der Form $s_A \in t$ herzustellen, wobei t ein fester Term ist und die Gestalt des Terms s_A von A abhängt. Es ist jedoch zu beachten, daß Tarskis Vorgehen rekursiv ist; ansonsten aber ist es so unphilosophisch, wie das, was ich hier eingeführt habe.

> I ist das korrespondierende $\mathbf{\Psi}$-Element zu 1.
> Wenn $\tilde{n}$ das korrespondierende $\mathbf{\Psi}$-Element zu der natürlichen Zahl n ist, dann ist $\tilde{n}^I$ das korrespondierende $\mathbf{\Psi}$-Element zu der natürlichen Zahl n′.

Jetzt geht es natürlich darum, diese Menge $\mathbf{\Psi}$ auf der Objektebene repräsentieren zu können — und da kommt das Problem mit der Unendlichkeit herein.

Wenn ich sage, „da kommt das Problem mit der Unendlichkeit herein“, so bedeutet das nicht, daß es ein Problem wäre, einen Term zu formulieren, der alle Elements von $\mathbf{\Psi}$ als Elemente enthält. Das Problem der Unendlichkeit besteht darin, zeigen zu können, daß ein Term nur diese Objekte als Elemente enthält.

Die grundsätzliche Idee für meinen Ansatz geht zurück auf den Beweis der aussagenlogischen Unvollständigkeit in Schüttes [50], S. 238. Schütte zeigt auf einfache Weise, daß in einer schnittfreien Logik mit den üblichen Regeln für die uneingeschränkte Abstraktion die Formel

$$\lambda x\,(x \in x) \in \lambda x\,(x \in x)$$

sofort als unentscheidbar eingesehen werden kann. Wegen der Schnitteliminierbarkeit kann diese Formel nur durch einen $\in$-Schluß links oder rechts gewonnen worden sein. In beiden Fällen aber führt diese Formel nur auf sich selbst zurück:

$$\frac{\lambda x\,(x \in x) \in \lambda x\,(x \in x) \Rightarrow}{\lambda x\,(x \in x) \in \lambda x\,(x \in x) \Rightarrow} \qquad \frac{\Rightarrow \lambda x\,(x \in x) \in \lambda x\,(x \in x)}{\Rightarrow \lambda x\,(x \in x) \in \lambda x\,(x \in x)}\,.$$

Eine kleine Variation dieser Überlegung führt nun zu meinem Ansatz. Und zwar bediene ich mich der folgenden Formel:

$$\lambda x\,((x \in x) \sqcap A) \in \lambda x\,((x \in x) \sqcap A)\,.$$

Diese Formel absorbiert, sozusagen, Antezedentformeln (also Annahmen) der Gestalt A:

$$\cfrac{\cfrac{\lambda x\,((x \in x) \sqcap A) \in \lambda x\,((x \in x) \sqcap A),\, A \Rightarrow}{(\lambda x\,((x \in x) \sqcap A) \in \lambda x\,((x \in x) \sqcap A)) \sqcap A \Rightarrow}}{\lambda x\,((x \in x) \sqcap A) \in \lambda x\,((x \in x) \sqcap A) \Rightarrow}\,.$$

Auf der rechten Seite

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A) \qquad \Rightarrow A}{\Rightarrow (\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A))\,\Box\, A}}{\Rightarrow \lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)}$$

ist die Situation im wesentlichen wie im Fall von Schüttes Formel: Man muß die Formel schon bewiesen haben, um sie beweisen zu können (immer Schnitteliminierbarkeit vorausgesetzt).

Um eine einfache, gängige Schreibweise zu haben, definiere ich:

$$\breve{\gamma}[A] :\equiv \lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\,.$$

Dann läßt sich die Formel

$$(\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)) \leftrightarrow (\lambda x((x\in x)\,\Box\, A)\in\lambda x((x\in x)\,\Box\, A))\,\Box\, A$$

einfach als

$$\breve{\gamma}[A] \leftrightarrow \breve{\gamma}[A]\,\Box\, A$$

schreiben und man erkennt deutlich den Fixpunktcharakter. Ein Schlußschema der Gestalt

$$\dfrac{\breve{\gamma}[A], A, \ldots, A, \Gamma \Rightarrow}{\breve{\gamma}[A], \Gamma \Rightarrow}$$

läßt sich leicht (durch eine Induktion nach der Anzahl der Vorkommnisse von A) als $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_{\lambda}$-herleitbar nachweisen.

Nun kann man einen Term formulieren, der nachweislich alle natürlichen Zahlen als Elemente enthält:

$$\mathrm{N}_{\gamma} :\equiv \lambda x \bigwedge y(0\in y\,\Box\,\breve{\gamma}[\bigwedge z(z\in y \rightarrow z'\in y)] \rightarrow x\in y)\,.$$

Das reicht aber nicht, um ein Induktionsschema der folgenden Art

$$\dfrac{\Rightarrow \mathfrak{F}[0] \qquad \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[a^{I}]}{s\in \mathrm{N}_{\gamma} \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}$$

beweisen zu können, aus dem einfachen Grund, weil die rechte Obersequenz in der folgenden Schlußfigur keine Aussicht hat, jemals bewiesen werden zu können:

$$\dfrac{\Rightarrow 0\in\lambda x\,\mathfrak{F}[x] \qquad \Rightarrow \breve{\gamma}[\bigwedge z(z\in\lambda x\,\mathfrak{F}[x] \rightarrow z'\in\lambda x\,\mathfrak{F}[x])]}{s\in\lambda x \bigwedge y(0\in y\,\Box\,\breve{\gamma}[\bigwedge z(z\in y \rightarrow z'\in y)] \rightarrow x\in y) \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}\,.$$

In Anbetracht der obigen Überlegungen besteht keine Aussicht, jemals in der Lage zu kommen, $\breve{\gamma}[A]$ (in $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_{\lambda}$ oder einer sinnvollen Erweiterung davon) für irgendeine Formel A beweisen zu können. Aber die Situation ist nicht ganz hoffnungslos. Es mag nicht möglich sein, die Gesamtheit der natürlichen Zahlen auf diese Weise direkt so zu definieren, daß gewisse Induktionsregeln bewiesen werden können, aber was möglich ist, ist, das N_γ zugrundeliegende Schema für die Definition eines Zwischenterms heranzuziehen, welcher dazu dient eine Implikation auszudrücken, in der das Vorderglied beliebig oft gebraucht werden kann, etwa in der Form

$$A \,\square\, \ldots \,\square\, A \rightarrow B\,,$$

d.h. es gibt eine Anzahl von Anwendungen von A als Annahme, die B impliziert, also eine *schwache Implikation*.

Anders gesagt, mit $\breve{\gamma}[A]$ hat man zwar noch keine Induktion, aber einen wesentlichen Baustein dazu: die Möglichkeit auszudrücken, daß der Induktionsschritt beliebig oft zur Verfügung steht, d.h. einen Ersatz für Zusammenziehungen einer bestimmten Form, erzeugt mithilfe der Selbstbezüglichkeit. Das ist aber nicht, wie im Fall der natürlichen Zahlen, ein Term, sondern eine Formel. Zu diesem Zweck definiere ich den Term

$$\mathbf{Z} :\equiv \lambda x \bigwedge y\,(I \in y \,\square\, \breve{\gamma}[\bigwedge z\,(z \in y \rightarrow z^I \in y)] \rightarrow x \in y)\,.$$

Für $\mathbf{Z}$ läßt sich nun zeigen, daß

$\Rightarrow I \in \mathbf{Z}$, und
$s \in \mathbf{Z} \Rightarrow s^I \in \mathbf{Z}$

in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar sind.[102] Somit gilt: wenn s ein Element von $\mathbf{\Psi}$, so ist $s \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{L^iD}_\lambda$beweisbar.

Was aber von größerer Bedeutung ist, ist die umgekehrte Richtung: Wenn $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar ist, dann ist s ein Element von $\mathbf{\Psi}$.

Das läßt sich durch folgende Reihe von Überlegungen wahrscheinlich machen.[103]

Wenn $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar ist, so ist es sicher auch

$$I \in b, \breve{\gamma}[\bigwedge z\,(z \in b \rightarrow z^I \in b)] \Rightarrow s \in b\,,$$

und zwar aufgrund einer Eliminierung von logischen Konstanten. Wegen der Schnitteliminerbarkeit muß damit auch

$$I \in b, \bigwedge z\,(z \in b \rightarrow z^I \in b), \breve{\gamma}[\bigwedge z\,(z \in b \rightarrow z^I \in b)] \Rightarrow s \in b$$

[102] Vgl. [36], S. 388.

[103] Eine etwas ausführlichere Beweisskizze findet sich [36], S. 391. Ich will aber nicht verhehlen, daß der Beweis, auch wie er in [37], Abschnitt 132a, dargelegt ist, Lücken aufweist.

$\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar sein. Das läßt sich dahingehend verallgemeinern, daß es eine natürliche Zahl n derart geben muß, daß

$$I \in b, [\bigwedge z(z \in b \to z^I \in b)]^{\cdot \mathrm{n}} \Rightarrow s \in b$$

$\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar ist, was wiederum darauf reduziert werden kann, daß es eine Reihe von Termen $\xi_1, \ldots, \xi_\mathrm{n}$ derart gibt, daß

$$I \in b, \xi_1 \in b \to \xi_1^I \in b, \ldots, \xi_\mathrm{n} \in b \to \xi_\mathrm{n}^I \in b \Rightarrow s \in b$$

in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar ist. Aufgrund der Irreduzibilität von Formeln der Gestalt $s \in b$ (b ist eine freie Variable) läßt sich sagen, daß jedes der ξ_i ($\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$) mit einem Element aus $\{I, \ldots, \tilde{n}\}$ identisch sein muß. Damit erhält man dann, daß $s \in \{I, II, \ldots, \tilde{n}\}$ sein muß, d.h. $s \in \mathbf{\Psi}$.

13. Z-Schlüsse, Notwendigkeit und schwache Implikation

Wir haben festgestellt, daß $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ nur dann $\mathbf{L^iD}_\lambda$-beweisbar ist, wenn $s \in \mathbf{\Psi}$. Wenn wir nun $[A/s]$ für $\lambda A \in s$ schreiben, folgt daraus, daß die Schlußregel

$$\frac{\Rightarrow s \in \mathbf{Z} \qquad \Rightarrow A}{\Rightarrow [A/s]}$$

in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ zulässig ist, d.h. zu den Grundschlußregeln hinzugenommen werden kann, ohne daß neue Formeln beweisbar werden. Das sieht man folgendermaßen. Wenn $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisbar ist, dann ist s ein Element von $\mathbf{\Psi}$, d.h. s ist entweder I oder es gibt ein Element t von $\mathbf{\Psi}$ derart, daß $s \equiv t^I$. Die Behauptung folgt durch eine meta-theoretische Induktion:

Induktionsbasis:

$$\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow [A/I]}\ .$$

Induktionsschritt: die Induktionsvoraussetzung ist

$$\frac{\Rightarrow t \in \mathbf{Z} \qquad \Rightarrow A}{\Rightarrow [A/t]}\ ,$$

d.h. man erhält $\Rightarrow [A/t]$. Da außerdem

$$\frac{\Rightarrow [A/t] \qquad \Rightarrow A}{\Rightarrow [A/t^I]}$$

gilt, erhält man $\Rightarrow [A/s]$ mit $s \equiv t^I$.

Jetzt kommt der spekulative Schritt.

Was wir festgestellt haben, ist, daß aus der Beweisbarkeit von $s \in \mathbf{Z}$ und A auf die Beweisbarkeit von $\lambda A \in s$ geschlossen werden kann. Was ist aber, wenn $s \in \mathbf{Z}$ nur unter Annahmen gezeigt werden kann, d.h. wenn nur $\Gamma \Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ (für nichtleeres Γ) beweisbar ist? Kann man dann das Schema

$$(\mathbf{Z}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow s \in \mathbf{Z} \qquad \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow [A/s]}$$

widerspruchsfrei als eine neue Grundschlußregel zu $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$ hinzunehmen? Mit dieser Frage begeben wir uns in das eigentliche Gebiet der spekulativen Logik: synthetisch-apriorische Erkenntniserweiterung.

Das System, das aus $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$ durch Hinzunahme von $\mathbf{Z}$ als Grundschlußregel entsteht, soll $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda^{\mathrm{Z}}$ heißen. Was nun gezeigt werden kann, ist, daß alle Anwendungen der $\mathbf{Z}$-Schlußregel in $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda^{\mathrm{Z}}$-Beweisen von Endsequenzen der Form $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ eliminiert werden können, d.h., wenn $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ mit $\mathbf{Z}$-Schlüssen $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda^{\mathrm{Z}}$-beweisbar ist, so ist es auch ohne $\mathbf{Z}$-Schlüsse, d.h. $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$-beweisbar.[104] Mittels Kontraposition erhalten wir dann: Wenn die Sequenz $\Rightarrow s \in \mathbf{Z}$ nicht in $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$ (also ohne $\mathbf{Z}$-Schlüsse) beweisbar ist, dann ist sie es auch mit $\mathbf{Z}$-Schlüssen nicht. Da die Sequenz $\Rightarrow 0 \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$ nicht beweisbar ist, ist sie es also auch nicht mit $\mathbf{Z}$-Schlüssen. Damit ist gezeigt, daß $\mathbf{Z}$-Schlüsse widerspruchsfrei zu $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$ hinzugenommen werden können. Es ist eine rein meta-logische Einsicht, die hier zur Anwendung kommt.

Nun können wir das Problem der Formulierung eines Terms angehen, der uns eine Form der Induktion liefert. Wir ziehen $\mathbf{Z}$ zur Definition des folgenden Terms heran:

$$\breve{\mathbf{\Pi}}^\circ :\equiv \lambda x(x \in \mathbf{Z} \,\Box \bigwedge y([I \in y \wedge \bigwedge z(z \in y \rightarrow z^I \in y)/x] \rightarrow x \in y)).$$

Offensichtlich gilt wie für $\mathbf{Z}$, daß

$$\Rightarrow I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^\circ, \quad \text{und}$$

$$s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^\circ \Rightarrow s^I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^\circ$$

$\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_\lambda$-beweisbar sind. $\breve{\mathbf{\Pi}}^\circ$ erlaubt nun eine Form der Induktion, deren Gegenstand allerdings nicht Zahlen sind, sondern Elemente von $\mathbf{Z}$, d.h. $I, I^I, I^{II}, \dots$:

[104] Der Beweis ist detaillierter ausgeführt in [37], Abschnitt 133b. Ich fürchte aber, daß der Beweis auch dort noch unzureichend ist.

$$\text{(13.1)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[I] \qquad \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[a^I]}{s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]} \ .$$

Es sei in der folgenden Beweisfigur $\xi :\equiv \lambda x_1(C \to \mathfrak{F}[x_1])$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[I]}{C \Rightarrow \mathfrak{F}[I]}}{\Rightarrow C \to \mathfrak{F}[I]}}{\Rightarrow I \in \xi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C \Rightarrow C \qquad \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[a^I]}{C \to \mathfrak{F}[a], C \Rightarrow \mathfrak{F}[a^I]}}{C \to \mathfrak{F}[a] \Rightarrow C \to \mathfrak{F}[a^I]}}{a \in \xi \Rightarrow a^I \in \xi}}{\Rightarrow a \in \xi \to a^I \in \xi}}{\Rightarrow \bigwedge z(z \in \xi \to z^I \in \xi)}}{\Rightarrow I \in \xi \wedge \bigwedge z(z \in \xi \to z^I \in \xi)}}{s \in \mathbf{Z} \Rightarrow [I \in \xi \wedge \bigwedge z(z \in \xi \to z^I \in \xi)/s]} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \qquad \mathfrak{F}[s] \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}{C \to \mathfrak{F}[s], \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}}{s \in \xi, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}}{s \in \mathbf{Z}, [I \in \xi \wedge \bigwedge z(z \in \xi \to z^I \in \xi)/s] \to s \in \xi, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}}{s \in \mathbf{Z}, \bigwedge y([I \in y \wedge \bigwedge z(z \in y \to z^I \in y)/s] \to s \in y), \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}}{s \in \mathbf{Z} \Box \bigwedge y([I \in y \wedge \bigwedge z(z \in y \to z^I \in y)/s] \to s \in y), \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]}}{s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]} \ .$$

Diese Induktion erlaubt noch keine Seitenformeln, aber sie reicht aus, Zusammenziehungen für Formeln der Gestalt $s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}$ zu beweisen:

$$\text{(13.2)} \qquad \frac{\Rightarrow I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Box I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \qquad a \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Box a \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow a^I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Box a^I \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}}{s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Box s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}} \ .$$

Das erlaubt zumindest eine kleine Verstärkung von 13.1:

$$\text{(13.3)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[I] \qquad \mathfrak{F}[a], a \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow \mathfrak{F}[a^I]}{s \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]} \ .$$

Mit dieser Form der Induktion, die ich auch *Protoinduktion* genannt habe,[105] lassen sich nun die intuitiven Formulierungen 12.1 und 12.2 vom vorigen Abschnitt formal fassen. Ich beginne mit einem Begriff der Notwendigkeit.

[105] Z.B. in [36], S. 392.

Die Ausdrucksfähigkeit der uneingeschränkten Abstraktion gestattet die Formulierung eines Begriffs der Notwendigkeit, der die Intuition von 12.1 symbolisch erfaßt durch

$$\Box A :\equiv \bigwedge x(x\in\mathbf{Z} \to [A/x])\,, \tag{13.4}$$

in Worten etwa: $\lambda A\in x$ für jedes Element x von $\mathbf{Z}$; d.h. es sieht fast so aus, als hätte ich erreicht, was ich oben auf S. 143 als Ziel erklärt habe: eine Möglichkeit, über Annahmen gleicher Gestalt zu quantifizieren.

Tatsächlich läßt sich einiges, aber nicht alles, Wünschenswerte zeigen. Zunächst einmal kann $\Box A \Rightarrow A$ schon ohne $\mathbf{Z}$-Schlüsse bewiesen werden:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow I\in\mathbf{Z} \qquad \dfrac{A\Rightarrow A}{[A/I]\Rightarrow A}}{I\in\mathbf{Z}\to[A/I]\Rightarrow A}}{\bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A/x])\Rightarrow A}\ .$$

Tatsächlich läßt sich für jede natürliche Zahl $\Box A \Rightarrow A\,\square^{\mathrm{n}}A$ in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ beweisen.

Mit dem Einsatz von $\mathbf{Z}$-Schlüssen läßt sich weiterhin zeigen, daß Schlüsse nach dem Schema

$$\dfrac{\Rightarrow A}{\Rightarrow \Box A}$$

herleitbar sind:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A}{a\in\mathbf{Z}\Rightarrow[A/a]}}{\Rightarrow a\in\mathbf{Z}\to[A/a]}}{\Rightarrow \bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A/x])}\ .$$

Dann wird aber deutlich, daß wir mit der Definition 13.4 spätestens dann nicht weiter kommen, wenn es um das sogenannte K-Axiom geht: $\Box(A\to B), \Box A \Rightarrow \Box B$. Das sollte aus folgender Reduktion klar werden:

$$\begin{array}{c}
a\in\mathbf{Z}\to[A\to B/a],\, a\in\mathbf{Z}\to[A/a],\, a\in\mathbf{Z}\Rightarrow[B/a] \\
\hline\hline
\bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A\to B/x]),\, \bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A/x]),\, a\in\mathbf{Z}\Rightarrow[B/a] \\
\hline
\bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A\to B/x]),\, \bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A/x])\Rightarrow a\in\mathbf{Z}\to[B/a] \\
\hline
\bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A\to B/x]),\, \bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[A/x])\Rightarrow \bigwedge x(x\in\mathbf{Z}\to[B/x])
\end{array}\ .$$

Eine Herleitung der obersten Sequenz kann $\mathbf{Z}$ nicht bieten. Das Problem ist, daß $\mathbf{Z}$ noch keine Induktion gestattet und auch keine Zusammenziehungen für Formeln der Gestalt $s\in\mathbf{Z}$, wie es in 13.2 für Formeln der Gestalt $s\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}$ formuliert wurde. Deshalb wende ich mich folgender Definition zu:

$$\Box A :\equiv \bigwedge x\,(x\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A/x])\,,$$

die vielversprechender ist, weil sie anstelle von $\mathbf{Z}$ den Term $\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}$ hat, der, wie wir gesehen haben, durchaus Induktionen ermöglicht.

Damit können wir nun tatsächlich das K-Axiom beweisen. Anstelle von

$$a\in\mathbf{Z} \to [A \to B/a], a\in\mathbf{Z} \to [A/a], a\in\mathbf{Z} \Rightarrow [B/a]$$

in der vorgehenden Reduktion erhalten wir nun

$$a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A \to B/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow [B/a]$$

und können folgendermaßen weiter reduzieren:

$$\begin{array}{c}
a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \qquad\qquad [A \to B/a], [A/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow [B/a] \\
\hline\hline
a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A \to B/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}, a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ}, a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow [B/a] \\
\hline\hline
a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A \to B/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \to [A/a], a\in\breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \Rightarrow [B/a]
\end{array}\quad .$$

Was bleibt, ist nun eine Protoinduktion mit dem linken Ast:

$$\begin{array}{c}
A \to B, A \Rightarrow B \\
\hline\hline
[A \to B/I], [A/I] \Rightarrow [B/I] \\
\hline
[A \to B/I] \Box [A/I] \Rightarrow [B/I] \\
\hline
\Rightarrow [A \to B/I] \Box [A/I] \to [B/I]
\end{array}$$

und dem rechten Ast:

$$\begin{array}{c}
[A \to B/a], [A/a] \Rightarrow [A \to B/a] \Box [A/a] \qquad
\begin{array}[b]{c}
[B/a] \Rightarrow [B/a] \qquad A \to B, A \Rightarrow B \\
\hline
[B/a], A \to B, A \Rightarrow [B/a] \Box B \\
\hline
[B/a], A \to B, A \Rightarrow [B/a^{I}]
\end{array} \\
\hline
[A \to B/a] \Box [A/a] \to [B/a], [A \to B/a], A \to B, [A/a], A \Rightarrow [B/a^{I}] \\
\hline\hline
[A \to B/a] \Box [A/a] \to [B/a], [A \to B/a^{I}], [A/a^{I}] \Rightarrow [B/a^{I}] \\
\hline
[A \to B/a] \Box [A/a] \to [B/a], [A \to B/a^{I}] \Box [A/a^{I}] \Rightarrow [B/a^{I}] \\
\hline
[A \to B/a] \Box [A/a] \to [B/a] \Rightarrow [A \to B/a^{I}] \Box [A/a^{I}] \to [B/a^{I}]
\end{array}\quad .$$

Mit anderen Worten, wir sind bei einem Begriff der T-Modalität angelangt — und das ohne irgendein Gerede von „möglichen Welten“, wie es in der analytischen Philosophie üblich ist, auch wenn es sich dabei nur um algebraische Modelle handelt. Bei dem Begriff der Modalität, den ich hier eingeführt habe, werden keinerlei Modelle zuhilfe genommen; es handelt sich um eine rein syntaktisch eingeführte theoretische Konstante, wie es auch die $\scriptstyle\square$-Konjunktion selbst ist, als deren Verallgemeinerung die $\Box$-Notwendigkeit aufgefaßt werden, so wie der $\bigwedge$-Quantor eine Verallgemeinerung der $\wedge$-Konjunktion darstellt.

Das Verhältnis des Notwendigkeitsoperators zur klassischen Logik wird durch die $\mathbf{L^iD}^{\mathrm{Z}}_{\lambda}$-Beweisbarkeit der beiden folgenden Sequenzen treffend charakterisiert:

$$\Box(A \vee \neg A), A \Rightarrow \Box A\,,$$
$$\Box(A \vee \neg A), \Box A \to B \Rightarrow A \to B\,.$$

D.h. modale Unterscheidungen brechen für klassisch beweisbare Formeln zusammen.

Auf entsprechende Weise läßt sich nun auch 12.2 (schwache Implikation) auf der formalen Ebene erfassen:

$$A \supset B :\equiv \bigvee x\,(x \in \breve{\mathbf{\Pi}}^{\circ} \,\scriptstyle\square\displaystyle\, ([A/x] \to B))\,.$$

Damit erhält man dann beispielsweise:

$$A \to B \Rightarrow A \supset B\,,$$
$$A \supset B, A \supset (B \to C) \Rightarrow A \supset C\,,$$
$$\Box(A \vee \neg A), A \supset B \Rightarrow A \to B\,,$$
$$A \supset B, \Box((A \to B) \to B) \Rightarrow B\,,$$
$$A \supset B, \Box((A \to B) \to (C \to B)) \Rightarrow C \supset B\,,$$

und Schlüsse nach folgenden Schemata sind direkt ableitbar:

$$\frac{A, \ldots, A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}\,, \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Pi \Rightarrow A \supset B}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow B}\,, \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Pi \Rightarrow C}{A \supset B, \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow C}\,,$$

$$\frac{(A \to B) \Rightarrow (C_1 \to (\ldots \to (C_n \to B)\ldots))}{(A \supset B) \Rightarrow (C_1 \supset (\ldots \supset (C_n \supset B)\ldots))}\,.$$

14. Beschreibung neu gefaßt

Die Fixpunkteigenschaft für Termformen ist unverträglich mit dem bestimmten Artikel in seiner klassischen axiomatischen Form. Das ist die eine Seite. Die andere ist, daß die Ausdruckskraft der mengentheoretischen Komprehension bzw. der Abstraktion im Rahmen einer klassischen Mengenlehre die Formulierung einer ganzen Reihe von Termen erlaubt, die für den Beweis des ι-Axioms ausreichen.[106] Angesichts der Widerspruchsfreiheit von $\mathbf{L^iD}_\lambda$ wird klar sein, daß da irgendwo eine Zusammenziehung versteckt sein muß, die die völlige Übertragung des klassischen Ansatzes vereitelt. Damit ergibt sich aber die Frage, wo genau geht ein Beweis des ι-Axioms mit diesen Definitionen nicht mehr durch und ist es möglich, für die anfallenden Zusammenziehungen einen Ersatz zu finden bzw. sie in anderer Weise zu integrieren, um ein modifiziertes ι-Axiom zu erhalten?

Natürlich ist es möglich, daß eine Antwort auf diese Frage von der besonderen Gestalt des Terms abhängt, der zur Darstellung des bestimmten Artikels in der höheren Logik hergenommen wird. Quine in [43], S. 147, gibt dem Term

$$\lambda x \bigvee y (x \in y \,\Box \bigwedge z (z = y \leftrightarrow \mathfrak{F}[z])) ,$$

der die „waste cases“ einheitlich mit $\emptyset$ gleichsetzt, den Vorzug. Es ist mir nicht gelungen, 14.5 bei Zugrundelegung dieses Terms ohne den Gebrauch einer Form der Extensionalität oder Zusammenziehung zu beweisen. Deshalb wäre es zumindest nötig, auf einen anderen Term wie etwa

$$\lambda x \bigvee y (x \in y \,\Box\, (\mathfrak{F}[y] \wedge \bigwedge z (\mathfrak{F}[z] \rightarrow y = z))$$

auszuweichen, der mit Sicherheit weder Extensionalität noch Zusammenziehung erfordert und ebenfalls die „waste cases“ einheitlich mit $\emptyset$ gleichsetzt. Da ich aber nicht an einer einheitlichen Behandlung der „waste cases“ interessiert bin, zumindest jetzt noch nicht, bin ich besser dran, wenn ich die *Eindeutigkeitsbedingung* $\bigwedge z (\mathfrak{F}[z] \rightarrow y = z)$ ganz fallen lasse und die folgende einfache Definition heranziehe, die auch schon in Quine [43], S. 149, zu finden ist:

$$\iota x\, \mathfrak{F}[x] :\equiv \lambda x \bigvee y (x \in y \,\Box\, \mathfrak{F}[y]) .$$

Unter klassischen Bedingungen, d.h. bei Verfügbarkeit von Zusammenziehungen, erhält man mit dieser Definition das ι-Axiom auf einfache

[106] Cf. [43], S. 147 ff. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Formulierungen ist die Behandlung der „waste cases“.

Weise. Aber auch ohne Zusammenziehungen kommt man noch ein ganzes Stück weit. Ich führe eine Reihe wichtiger Schritte auf.

(14.1) $s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x], \mathfrak{F}[t], \bigwedge z_1 \bigwedge z_2\, (\mathfrak{F}[z_1] \,\square\, \mathfrak{F}[z_2] \to z_1 = z_2) \Rightarrow s \in t\,,$

(14.2) $s \in t, \mathfrak{F}[t] \Rightarrow s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x]\,,$

(14.3) $\mathfrak{F}[t], \bigwedge z_1 \bigwedge z_2 (\mathfrak{F}[z_1] \,\square\, \mathfrak{F}[z_2] \to z_1 = z_2) \Rightarrow \iota x\, \mathfrak{F}[x] = t\,,$

(14.4) $s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x], \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow s \in t\,,$

(14.5) $\mathfrak{F}[t], \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow \iota x\, \mathfrak{F}[x] = t\,,$

(14.6) $s \in t, \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \leftrightarrow t = y) \Rightarrow s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x]\,,$

(14.7) $\bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \leftrightarrow t = y) \Rightarrow \iota x\, \mathfrak{F}[x] = t\,.$

Jede dieser Sequenzen kann leicht bewiesen werden. Aber da Zusammenziehungen tückisch sein können, will ich hier die beiden wichtigsten, 14.2 und 14.4 beweisen.

Zu 14.2.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{s \in t \Rightarrow s \in t \qquad \mathfrak{F}[t] \Rightarrow \mathfrak{F}[t]}{s \in t, \mathfrak{F}[t] \Rightarrow s \in t \,\square\, \mathfrak{F}[t])}}{s \in t, \mathfrak{F}[t] \Rightarrow \bigvee y (s \in y \,\square\, \mathfrak{F}[y])}}{s \in t, \mathfrak{F}[t] \Rightarrow s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x]}\,.$$

Zu 14.4.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}[b] \Rightarrow \mathfrak{F}[b] \qquad s \in b, t = b \Rightarrow s \in t}{s \in b, \mathfrak{F}[b], \mathfrak{F}[b] \to t = b \Rightarrow s \in t}}{s \in b, \mathfrak{F}[b], \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow s \in t}}{s \in b \,\square\, \mathfrak{F}[b], \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow s \in t}}{\bigvee y (s \in y \,\square\, \mathfrak{F}[y]), \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow s \in t}}{s \in \iota x\, \mathfrak{F}[x], \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to t = y) \Rightarrow s \in t}\,.$$

Bis hierher gibt es noch nichts, was für die Widersprüche von Abschnitt 9 verantwortlich gemacht werden könnte, d.h. es sind noch keine Zusammenziehungen aufgetreten. Es ist der letzte Schritt auf dem Weg von 14.5 zu

$$\bigvee x (\mathfrak{F}[x] \,\square\, \bigwedge y (\mathfrak{F}[y] \to x = y)) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{C}[x]]$$

mithilfe eines Schnittes mit einer Substitutionsformel der Gestalt 8.2, wo Zusammenziehungen erforderlich werden, zumindest eine, immer vorausgesetzt, daß $\mathfrak{F}$ überhaupt eine Formel der ersten Stufe ist:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{F}[a], \bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y) \Rightarrow \iota x\, \mathfrak{F}[x] = a \qquad [\iota x\, \mathfrak{F}[x] = a]^{\cdot \mathrm{n}}, \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]] \\
\hline
\text{n Schnitte, im wesentlichen derselben Gestalt} \\
\hline
[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot \mathrm{n}}, [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y)]^{\cdot \mathrm{n}}, \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]] \\
\hline
\text{Vertauschung(en) und Zusamenziehung(en)} \\
\hline
\mathfrak{F}[a], \bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{C}[x]] \\
\hline
\mathfrak{F}[a] \square \bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{C}[x]] \\
\hline
\bigvee x(\mathfrak{F}[x] \square \bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to x = y)) \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{C}[x]]
\end{array} .$$

Da dies die einzigen Zusammenziehungen im Beweis des ι-Axioms sind, müssen sie als Ursache der Unverträglichkeit des ι-Axioms mit der uneingeschränkten Abstraktion angesehen werden. Es ist der einzige Punkt, an dem ein klassisches Prinzip zur Anwendung kommt. In Anbetracht von 8.2 bedeutet das, daß die Anzahl der Substitutionen eine Rolle spielt, d.h. der Leitgedanke des *Ressourcenbewußtseins* reicht bis hierher.[107]

Dann ist aber die Frage: Wie kann dem in einer zusammenziehungsfreien Logik Rechnung getragen werden?

Ich knüpfe an die obige Beweisfigur an, bevor die Zusammensetzungen zur Anwendung kommen. An die Stelle der Zusammensetzungen treten folgende Schlüsse:

$$\begin{array}{c}
[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot \mathrm{n}}, [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y)]^{\cdot \mathrm{n}}, \mathfrak{F}[a] \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]] \\
\hline
[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot \mathrm{n}+1}, [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y)]^{\cdot \mathrm{n}} \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]] \\
\hline\hline
\mathfrak{F}[a] \square^{\mathrm{n}} \mathfrak{F}[a], [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y)]^{\cdot \mathrm{n}} \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]] \\
\hline
\bigvee x(\mathfrak{F}[x] \square^{\mathrm{n}} \mathfrak{F}[x]), [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y] \to a = y)]^{\cdot \mathrm{n}} \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]
\end{array} .$$

D.h. zu jeder Nennform $\mathfrak{F}$ der ersten Stufe gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß die vorgehende Sequenz $\mathbf{L^iD_\lambda}$-beweisbar ist.

[107] Dieser Punkt ist wichtig im Hinblick auf die Möglichkeit einer Interpretation des λ-Kalküls in einer zusammenziehungsfreien Logik wie etwa in Abschnitt 4 in [39].

Aufgrund der Möglichkeit, einen Begriff der Notwendigkeit $\Box$ als eine unendliche $\scriptstyle\Box$-Konjunktion zu formulieren, der es zumindest gestattet, eine Akkumulation von gleichgestaltigen Antezedentformeln auszudrücken, kann der vorgehende Ersatz weiterentwickelt werden.

Es sei $\mathfrak{F}$ wie oben. Dann sind Sequenzen der folgenden Gestalt $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$-beweisbar:

$$\bigvee x\,\Box\,\mathfrak{F}[x], \Box\bigwedge z_1\bigwedge z_2(\mathfrak{F}[z_1]\mathbin{\scriptstyle\Box}\mathfrak{F}[z_2]\to z_1=z_2)\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]\,,$$
$$\bigvee x\,\Box(\mathfrak{F}[x]\mathbin{\scriptstyle\Box}\bigwedge y(\mathfrak{F}[y]\to x=y))\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]\,,$$
$$\bigvee x\,\Box\bigwedge y(\mathfrak{F}[y]\leftrightarrow x=y)\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]\,.$$

Das Vorgehen ist für jede der drei Sequenzen im wesentlichen dasselbe; ich beschränke meine Aufmerksamkeit auf die zweite. Ich setze mit der zweiten Zeile der vorigen Beweisfigur an:

$$\frac{[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot(\mathrm{n}+1)}, [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y\to a=y)]^{\cdot\mathrm{n}}\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]}{[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot(\mathrm{n}+1)}, [\bigwedge y(\mathfrak{F}[y\to a=y)]^{\cdot(\mathrm{n}+1)}\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]}$$
$$\overline{\underline{(\mathrm{n}+1)\ \ {\scriptstyle\Box}\text{-Einführungen, möglicherweise mit Vertauschungen}}}$$
$$\dfrac{\dfrac{[\mathfrak{F}[a]\mathbin{\scriptstyle\Box}\bigwedge y(\mathfrak{F}[y\to a=y)]^{\cdot(\mathrm{n}+1)}\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]}{\Box(\mathfrak{F}[a]\mathbin{\scriptstyle\Box}\bigwedge y(\mathfrak{F}[y\to a=y))\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]}\,\dagger}{\bigvee x\,\Box(\mathfrak{F}[a]\mathbin{\scriptstyle\Box}\bigwedge y(\mathfrak{F}[y\to a=y))\Rightarrow\mathfrak{F}[\iota x\,\mathfrak{F}[x]]}\ .$$

In dem mit † gekennzeichneten Schluß kommt 1i aus [38], S. 670, zur Anwendung.

Tatsächlich lassen sich die obigen Schemata schon für die $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$-Beweisbarkeit zeigen. Schema 1i aus [38], S. 670, das eine Art von $\Box$-Einführung links darstellt, kann ohne den Gebrauch von **Z**-Schlüssen gezeigt werden, d.h. ist schon $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$-beweisbar; und mehr wird von $\Box$ in dem obigen Beweis nicht gebraucht. Das bringt allerdings wenig, da es in $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$ unmöglich ist, eine Formel der Gestalt $\Box A$ zu beweisen.[108] Das ist eine entscheidende Änderung für $\Box$ in $\mathbf{L^{i}D}^{\mathrm{Z}}_{\lambda}$.

[108] Da die Schnittregel in $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$ eliminierbar ist, kann die $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$-Beweisbarkeit von $\Box A$ auf die einer Formel der Gestalt $\breve{\gamma}[A]$ zurückgeführt werden. Letztere kann jedoch niemals $\mathbf{L^{i}D}_{\lambda}$-beweisbar sein, wie aus Proposition 132.21 in [37] hervorgeht.

Damit ergeben sich die folgenden Schlußschemata als $\mathbf{L^iD}^{\mathrm{Z}}_{\lambda}$-herleitbar, sofern $\mathfrak{F}$ eine Nennform der ersten Stufe ist:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bigvee x \,\Box\, \mathfrak{F}[x] \qquad \mathfrak{F}[a], \mathfrak{F}[b], \Pi \Rightarrow a = b}{\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]}\,,$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s] \qquad \mathfrak{F}[a], \Pi \Rightarrow s = a}{\Box\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]}\,.$$

Auf diese Weise erhält man einen durchaus brauchbaren Ersatz für den bestimmten Artikel.

Angesichts des Zwischenergebnisses

$$[\mathfrak{F}[a]]^{\cdot(\mathrm{n}+1)}, [\bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)]^{\cdot(\mathrm{n}+1)} \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]$$

bietet sich jedoch noch eine andere Version an, die den Vorteil einer vertrauten Form hat. In der klassischen Formulierung wird die $\to$-Implikation durch die schwache Implikation $\supset$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
&\bigvee x\, \mathfrak{F}[x] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge z_1 \bigwedge z_2\, (\mathfrak{F}[z_1] \mathbin{\scriptstyle\Box} \mathfrak{F}[z_2] \to z_1 = z_2) \supset \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]\,,\\
&\bigvee x\, (\mathfrak{F}[x] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y] \to x = y)) \supset \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]\,,\\
&\bigvee x \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y] \leftrightarrow x = y) \supset \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]\,.
\end{aligned}$$

Das ergibt sich leicht aus folgender Variation der letzten Beweisfigur:

$$\dfrac{\Rightarrow \tilde{n}^I \in \breve{\mathbf{\Pi}} \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathfrak{F}[a] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)]^{\cdot(\mathrm{n}+1)} \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]}{[\mathfrak{F}[a] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)/\tilde{n}^I] \Rightarrow \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]}}{\Rightarrow [\mathfrak{F}[a] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)/\tilde{n}^I] \to \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]}}{\dfrac{\Rightarrow \tilde{n}^I \in \breve{\mathbf{\Pi}} \mathbin{\scriptstyle\Box} ([\mathfrak{F}[a] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)/\tilde{n}^I] \to \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]])}{\Rightarrow \bigvee x\, (x \in \breve{\mathbf{\Pi}} \mathbin{\scriptstyle\Box} ([\mathfrak{F}[a] \mathbin{\scriptstyle\Box} \bigwedge y\, (\mathfrak{F}[y \to a = y)/\tilde{n}^I] \to \mathfrak{F}[\iota x\, \mathfrak{F}[x]]))}}\,,$$

wobei natürlich, wie immer, $\mathfrak{F}$ eine Nennform der ersten Stufe sein muß.

15. Induktion neu gefaßt

Die schwache Implikation versetzt uns auch in die Lage, eine Definition der natürlichen Zahlen anzugeben:

$$\mathbf{N}^{\circ} :\equiv \lambda x\ \bigwedge y\, (0 \in y \wedge \bigwedge z\, (z \in y \to z' \in y) \supset x \in y)\,,$$

wobei $^\circ$ anzeigen soll, daß es sich hier um einen *exklusiven* Term in dem Sinne handelt, daß die Elemente von $\mathbf{N}^\circ$ wirklich nur $0, 0', \ldots$ sind, und nicht auch ihnen gleiche Terme anderer Gestalt.

$\mathbf{N}^\circ$ erlaubt die Formulierung eines Induktionsschemas.[109] Schlüsse nach folgenden Schemata sind $\mathbf{L^iD}^Z_\lambda$-herleitbar, sofern die freie Variable a nicht in der Untersequenz auftritt:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[0] \qquad \mathfrak{F}[a], a \in \mathbf{N}^\circ, \mathrm{n}\,\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[a']}{s \in \mathbf{N}^\circ, \Box\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s]} .$$

Das erlaubt auch eine doppelte Induktion in der Form:

$$\frac{a \in \mathbf{N}^\circ, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[a,0] \qquad \bigwedge x\, \mathfrak{F}[x,b], a \in \mathbf{N}^\circ, b \in \mathbf{N}^\circ, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[a,b']}{s \in \mathbf{N}^\circ, t \in \mathbf{N}^\circ, \Box\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s,t]} .$$

In Abschnitt 7 hatten wir gesehen, daß alle rekursiven Funktionen in $\mathbf{L^iD}_\lambda$ dargestellt werden können. Was dort jedoch nicht möglich war, war zu zeigen, daß sie auch *total* sind, d.h. für alle Argumente aus den natürlichen Zahlen auch Werte in den natürlichen Zahlen haben. Jetzt können wir zumindest für alle primitiv-rekursiven Funktionen die Totalität nachweisen.

Das reicht, um die primitiv-rekursive Arithmetik **PRA** in $\mathbf{L^iD}^Z_\lambda$ zu interpretieren. Ein entsprechendes Ergebnis kann in [37] oder auch [38] nachgelesen werden.

Es reicht aber nicht, wie im klassischen Fall, für eine verschränkte Induktion, d.h. eine Induktion der Form

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[0,b] \qquad \mathfrak{F}[a,t_1], \Pi \Rightarrow \mathfrak{F}[a',0] \qquad \mathfrak{F}[a,t_2], \mathfrak{F}[a',b], \Xi \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}{\Gamma, \Pi, \Xi \Rightarrow \mathfrak{F}[s,t]} .$$

Das kann man sich an Hand folgender Beweisfiguren deutlich machen. Mit dem klassischen Schema der Induktion erhält man:

[109] Das ist der ganze Sinn und Zweck des exklusiven Terms.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[0,b]}{\Gamma \Rightarrow \bigwedge y\, \mathfrak{F}[0,b]} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}[a,t_1] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',0]}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',0]} \qquad \cfrac{\mathfrak{F}[a,t_2], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',c]}}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \bigwedge y\, \mathfrak{F}[a',y]}}{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \bigwedge y\, \mathfrak{F}[s,y]}{\Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[s,t]}}\ .$$

Das Problem ist die Induktion im rechten Ast. Alles was man in $\mathbf{L^iD}^{\mathrm{Z}}_{\lambda}$ erhält, ist:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}[a,t_1] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',0]}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',0]} \qquad \cfrac{\mathfrak{F}[a,t_2], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}{\bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}}{\Box \bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',c]}}{\Box \bigwedge y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \bigwedge y\, \mathfrak{F}[a',y]}\ .$$

Das eignet sich aber nicht mehr für die zweite Induktion. Was hier fehlt, ist ein verstärkter Notwendigkeitsoperator $\boxed{\Box}$, der folgenden Schlußregeln gehorcht:

$$\cfrac{\Box^{\mathrm{n}} A, \Gamma \Rightarrow C}{\boxed{\Box} A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{und} \qquad \cfrac{\Box^{\mathrm{n}} \Gamma \Rightarrow C}{\boxed{\Box} \Gamma \Rightarrow \boxed{\Box} C}\ .$$

Damit ließe sich eine verschränkte Induktion folgendermaßen auf einfache Induktionen zurückzuführen:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Rightarrow \mathfrak{F}[0,b]}{\Rightarrow \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[0,y]}}{\Rightarrow \boxed{\Box} \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[0,y]} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Rightarrow \mathfrak{F}[a',0] \qquad \cfrac{\cfrac{b \in \mathbf{N}^{\circ} \Rightarrow \mathfrak{Z}[b] \in \mathbf{N}^{\circ} \qquad \mathfrak{F}[a,\mathfrak{Z}[b]], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}{b \in \mathbf{N}^{\circ}, \mathfrak{Z}[b] \in \mathbf{N}^{\circ} \rightarrow \mathfrak{F}[a,\mathfrak{Z}[b]], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}}{b \in \mathbf{N}^{\circ}, \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a,y], \mathfrak{F}[a',b] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',b']}}{c \in \mathbf{N}^{\circ}, \Box \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \mathfrak{F}[a',c]}}{\Box \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a',y]}}{\boxed{\Box} \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a,y] \Rightarrow \boxed{\Box} \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[a',y]}}{\cfrac{\cfrac{s \in \mathbf{N} \Rightarrow \boxed{\Box} \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[s,y]}{s \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigwedge^{\circ} y\, \mathfrak{F}[s,y]}}{s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N} \Rightarrow \mathfrak{F}[s,t]}}\ .$$

In [39] habe ich auf den Seiten 136–159 eine Möglichkeit vorgestellt, einen solchen verstärkten Notwendigkeitsoperator zu definieren, die im wesentlichen auf dem Verfahren aufbaut, das ich schon für die **Z**-Erweiterung eingesetzt habe. Damit lassen sich dann auch 2-Rekursionen darstellen.

Die gleiche Schwierigkeit taucht aber wieder auf, wenn es um eine dreifach verschränkte Induktion geht. Das Verfahren, das ich in [39] beschrieben habe, läßt sich jedoch entsprechend erweitern, was dann zu einer Hierarchie der (mathematischen) Induktionen führt, die ihrerseits wieder in eine entsprechende Hierarchie der Rekursionen mündet. Es steht zu erwarten, daß ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für die n-fach verschränkte Induktion eine Induktion bis ω_n erfordert, d.h. man erhält folgende Hierarchie für Rekursionen:

1-Rekursion: ω^ω oder, anders gesagt, ω_1
2-Rekursion: ω^{ω^ω} oder, anders gesagt, ω_2

$\vdots$

Dann stellt sich aber die Frage nach einem Abschluß dieser Hierarchie. Nicht zuletzt deshalb habe ich einen Ersatz für die Beschreibung eingeführt, um mit dem μ-Operator in der Lage zu sein, die Definitionsstruktur für allgemein rekursive Funktionen nachvollziehen zu können. Die entscheidende Frage ist, ob sich damit der Begriff der allgemein rekursiven Funktion für die zusammenziehungsfreie Logik einführen läßt. Das ist eine offene Frage, aber es scheint mir, insbesondere angesichts der inversen Church-Turing-These, eine Frage von eminenter metaphysischer Bedeutung zu sein.

16. Ausklang

Metaphysik im Anschluß an Kant und Hegel ist ein Projekt das sich als *Ableitung der Denkbestimmungen* aus einer Fakultät des Logischen kennzeichnen läßt. Das bedeutet, daß Denkbestimmungen als logische Entitäten definiert und ihre Eigenschaften innerhalb einer (höheren) Logik bewiesen werden. Das ist es, was Metaphysik zur Logik macht, und zwar zu einer spekulativen Logik, d.h. zu einer Logik, die immer wieder — durch Totalisierungen, die auf ihren eigenen Bereich abzielen — über sich selbst hinausgeht.

Das zentrale Problem einer Metaphysik als einer spekulativen Logik ist, mehr noch als in Freges Unterfangen einer logischen Grundlegung des Begriffs der Zahl, die Klärung der Frage: „Wie kommen die leeren Formen der Logik dazu, aus sich heraus solchen Inhalt zu gewinnen?“[110]

Mein grundsätzlicher Ansatz zur Beantwortung dieser Frage und gleichzeitig der Ausgangspunkt für meinen Versuch einer Begründung der Metaphysik durch logische Analyse der Selbstbezüglichkeit ist durch das Auftreten der Paradoxien in den Grundlagen der Logik, Semantik und Mengenlehre gegeben. Sie haben Freges ursprüngliches Unterfangen einer logischen Grundlegung der Arithmetik zunichte gemacht, aber gleichzeitig einen neuen Weg für eine logische Grundlegung der Dialektik und spekulativen Philosophie gewiesen, indem sie zeigen, daß schon die elementaren Bausteine der (höheren) Logik, Abstraktion und Prädikation, Widersprüche erzeugen. Auch wenn Poincaré dem nichts Positives abgewinnen konnte, er hat den Nagel auf den Kopf getroffen: „⟦L⟧a Logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie.“[111] Was auf der Grundlage der klassischen Logik nur als Antinomie in Erscheinung treten kann, wird in der spekulativen Logik zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht. Die Beziehungen widersprüchlicher Begriffe untereinander, die Möglichkeit, auf der Grundlage selbstbezüglicher Begriffsbildungen Hierarchien zu definieren und über sie zu totalisieren, wie das etwa im Fall von **Z** geschieht, stellen eine Quelle möglicher Inhalte für logische Einsicht dar. Damit werden wahrheitskonservierende Erweiterungsschlüsse ohne Rückgriff auf äußere Erfahrung möglich.

Das bedeutet, daß die uneingeschränkte Abstraktion, wie sie erstmals von Frege in die Logik eingeführt wurde, einen der beiden Eckpfeiler der Metaphysik als einer spekulativen Logik darstellt. Der andere Eckpfeiler ist eine Einschränkung der klassischen Logik, die nötig wird, wenn man in konsistenter Weise mit uneingeschränkter Abstraktion, und mit der daraus resultierenden Fixpunkteigenschaft und ihren Widersprüchen, arbeiten will. Darüber hinaus ist die spekulative Logik durch eine extreme Sparsamkeit ihrer theoretischen Konstanten gekennzeichnet. Idealerweise sollte neben der uneingeschränkten Abstraktion nur eine Form der Inklusion eingeführt werden. Höchstens noch die Identität, oder, alternativ, die Prädikation soll zu den Grundzeichen gehören.

[110] [14], S. 22.
[111] [41], S. 316.

In diesem Sinne habe ich auf den vorhergehenden Seiten versucht, einen Einblick in die Möglichkeiten zu geben, die sich eröffnen, wenn man die dogmatische Haltung des logischen Empirismus und seiner Tradition aufgibt und eine unbeschränkte Begriffsbildung mit ihren Typenvermengungen zuläßt. Die Einschränkung der Logik, die das ermöglicht, zielt auf den Umgang mit Annahmen beim Schließen ab. Klassisches Schließen erlaubt u.a. das Zusammenziehen von Annahmen derselben Gestalt, d.h. eine Annahme A, die im Verlauf eines Beweises mehrmals gebraucht wird, kann so behandelt werden, als ob sie nur ein einziges Mal gebraucht wird. Das verträgt sich nicht mit Typenvermengungen. Mit Typenvermengungen kommt Ambiguität, und mit der Ambiguität verlieren wir das, was gemeinhin als Voraussetzung für sinnvolles Schließen gilt: Stabilität der Aussagen.[112] Sinnvolles Schließen ohne Stabilität der Aussagen ist jedoch möglich, wenn Zusammenziehungen aufgegeben werden. Hier kündigt sich an, wie wichtig für das spekulative Denken die Rolle von Annahmen im Schließen ist. Es ist nicht eine besondere Form des Satzes, etwa der *spekulative Satz*, wie Hegel meinte, wodurch sich spekulatives Denken vom klassischen abhebt, sondern eine besondere Form des Schließens. Spekulative Logik kann geradezu als Wissenschaft der Dynamik von Annahmen im logischen Schließen gelten. Die Aufgabe für die Metaphysik als einer spekulativen Logik besteht dann darin, in dieser Dynamik die charakteristischen Gesetze von Kategorien dingfest zu machen.[113] Wohlgemerkt, die *Gesetze*, nicht die Kategorien selbst, sollen dingfest gemacht werden. Das heißt, auf der formalen Ebene sollen Objekte definiert werden, die gerade jene Gesetzmäßigkeiten erfüllen, die von Kategorien erwartet werden; so wie etwa die Folge $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ der von Neumann'schen Definition der natürlichen Zahlen die Gesetze der Arithmetik erfüllt. Das läßt sich natürlich nicht so ohne weiteres auf außer-mathematische Bereiche übertragen: Axiomatische Formulierungen kategorialer Begriffe sind rar. Da trifft es sich gut, daß die Axiomensysteme der modalen Logik eine Ausnahme darstellen: Mit der Erweiterung von $\mathbf{L^iD}_\lambda$ durch $\mathbf{Z}$-Schlüsse werden nämlich Gesetze ableitbar, die

[112] Vgl. [42], S. 462, zum Beispiel.

[113] Manch ein Philosoph wird hier Einspruch erheben wollen: Es darf nicht als ausgemacht gelten, daß Kategorien überhaupt Gesetzen gehorchen. Es werden wohl jene Philosophen sein, die sich in ihrem angestammten Bereich bedroht fühlen, sobald sie verbindlich angeben sollen, welchen Ursprung ihre Einsichten haben. Wenn es nach ihnen ginge, gäbe es weder eine moderne Physik noch eine moderne Logik.

dadurch als Gesetze der T-Modalität und einer schwachen Implikation identifiziert werden können. Diese Gesetze ermöglichen es auch, die Definitionsgleichungen der primitiv-rekursiven Funktionen zu beweisen; damit wird der Schritt von einer ziffernweisen Repräsentierbarkeit der primitiv-rekursiven (d.i. 1-rekursiven) Funktionen zu einer formalen Beweisbarkeit ihrer Definitionsgleichungen auf der Ebene der Objekttheorie vollzogen. Dieser Ansatz läßt sich schrittweise so erweitern, daß die Definitionsgleichungen der k-rekursiven Funktionen für jedes $k > 1$ ($k \in \mathbb{N}$) beweisbar werden.[114] Auf diese Weise ist die Metaphysik als spekulative Logik mit der Grundlegung der Mathematik aufs engste verknüpft.

Was bleibt, ist die Frage, ob und wie dieser Ansatz fortgeführt werden kann, um mehr als nur modale Kategorien zu gewinnen. Die Fixpunktkonstruktionen, die bisher zur Anwendung gekommen sind, zielen darauf ab, eine Akkumulation von Formeln derselben Gestalt ausdrücken zu können. Es steht nicht zu erwarten, daß sich auf diese Weise jemals etwas anderes als ein Notwendigkeitsbegriff ergibt. Der Ausweg wird sein, sich nicht nur auf den Ausschluß von Zusammenziehungen zu beschränken, sondern den einmal eingeschlagenen Weg auch auf weitere Strukturschlußregeln, insbesondere etwa Vertauschungen, auszudehnen. Dazu wird man aber Paradoxien betrachten müssen, die neben Zusammenziehungen auch auf signifikante Weise Vertauschungen involvieren.

Bei alldem muß klar sein, daß es sich hier um eine Aufgabe handelt, die sich mit den üblichen Mitteln der philosophischen Argumentation nicht bewältigen läßt. Deshalb habe ich der formal-logischen Behandlung so viel Raum gegeben. Es braucht mehr als nur schöne Worte, um aus der Hegelschen Idee der Metaphysik als einer spekulativen Logik etwas zu machen, das die Bezeichnung „Theorie“ verdient.

Literatur

[1] Badiou, Alain: *L'être et l'événement.* Paris: Éditions du Seuil, 1988.

[2] Bartlett, James M.: *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege*, München: Diss. Philosophie, 1961.

[3] Beeson, Michael J.: *Foundations of constructive mathematics.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1985 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3, Band 6).

[114] Für den Fall $k = 2$ habe ich das in [39] auf den Seiten 143–159 gezeigt.

[4] Bröcker, Walter: *Formale, transzendentale und spekulative Logik.* Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann, 1962 (Wissenschaft und Gegenwart Heft 23).

[5] Carnap, Rudolf: *Der logische Aufbau der Welt.* Hamburg: Felix Meiner, 1974 (vierte Auflage). – Erste Auflage 1928.

[6] Carnap, Rudolf: Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache. In: *Erkenntnis* 2 (1931), S. 219–241.

[7] Carnap, Rudolf: *Philosophy and logical syntax.* London: Kegan Paul, Trench, Trübner & Co. Ltd., 1935 (Psyche Miniatures, General Series 70). – Three lectures delivered at the University of London.

[8] Coxon, A. H.: *The Fragments of Parmenides. A critical text with introduction, translation, the ancient testimonia and a commentary.* Assen/Maastricht: Van Gorcum, 1986.

[9] Diaconescu, Radu: Axiom of choice and complementation. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 51 (1975), S. 176–178.

[10] Diels, Hermann; Kranz, Walther: *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Erster Band. Berlin: Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, 1951 (sechste Auflage).

[11] Essler, Wilhelm K.: Zur Topologie der Arten dialektischer Logik bei Hegel. In: Henrich, Dieter (Hrsg.): *Hegels Wissenschaft der Logik: Formation und Rekonstruktion.* Stuttgart: Klett-Cotta, 1986, S. 198–208.

[12] Fitch, Frederic B.: Self-Reference in Philosophy. In: *Mind* LV (1946), S. 64–73.

[13] Fraenkel, Abraham A.; Bar-Hillel, Yehoshua; Levy, Azriel: *Foundations of Set Theory.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973 (zweite Auflage). – Erste Auflage 1958.

[14] Frege, Gottlob: *Grundlagen der Arithmetik.* Breslau: Marcus, 1934 (zweite Auflage). – Erste Auflage: Wilhelm Koebner, Breslau 1884.

[15] Frege, Gottlob: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* Bd. II. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1966. – Orig.: Verlag von Hermann Pohle, Jena 1903.

[16] Girard, Jean-Yves: *Studies in Proof Theory.* Bd. I: *Proof Theory and Logical Complexity*. Napoli: Bibliopolis, 1987.

[17] Glockner, Hermann (Hrsg.): *Hegel Sämtliche Werke. Jubiläumsausgabe in zwanzig Bänden.* Stuttgart-Bad Cannstatt: Friedrich

Frommann Verlag (Günther Holzboog), 1961–68 (vierte Auflage). – Erste Auflage 1927–30.

[18] GÖDEL, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), S. 173–198.

[19] GÖDEL, Kurt: Russell's Mathematical Logic. In: SCHILPP, Paul A. (Hrsg.): *Library of living philosophers*. Bd. 5: *The Philosophy of Bertrand Russell*. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1944, S. 123–153.

[20] GOODMAN, Nicolas D.; MYHILL, John: Choice implies excluded middle. In: *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 24 (1978), S. 461.

[21] GOOLD, George P. (Hrsg.): *Aristotle. The Metaphysics. Books* I–IX. Cambridge MA und London: Harvard University Press, 1989 (The Loeb Classical Library 271). – Erstauflage 1933.

[22] GOOLD, George P. (Hrsg.): *Aristotle. The Metaphysics: Books* X–XIV*, Oeconomica, Magna Moralia.* Cambridge MA und London: Harvard University Press, 1990, (The Loeb Classical Library 287). – Erstauflage 1935.

[23] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *Philosophische Propädeutik*. [17], Bd. 3.

[24] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse*. [17], Bd. 6.

[25] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *System der Philosophie. Erster Teil. Die Wissenschaft der Logik*. [17], Bd. 8.

[26] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *System der Philosophie. Dritter Teil. Die Philosophie des Geistes*. [17], Bd. 10.

[27] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie. Erster Band*. [17], Bd. 17.

[28] HEGEL, Georg Wilhelm F.: *Vorlesungen über die Philosophie der Geschichte*. [17], Bd. 11.

[29] HEISS, Robert: *Logik des Widerspruchs. Eine Untersuchung zur Methode der Philosophie und zur Gültigkeit der formalen Logik.* Berlin und Leipzig: Walter de Gruyter & Co., 1932.

[30] HERMES, Hans; KAMBARTEL, Friedrich; KAULBACH, Friedrich (Hrsg.): *Gottlob Frege. Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel* I. Hamburg: Felix Meiner, 1969.

[31] Hermes, Hans; Scholz, Heinrich: *Mathematische Logik.* Leipzig: Teubner, 1952 (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, 1. Teil, Heft 1, Teil I).

[32] Koch, Anton F.: Die Selbstbeziehung der Negation in Hegels Logik. In: *Zeitschrift für philosophische Forschung* 53 (1999), S. 1–29.

[33] Łukasiewicz, Jan; Tarski, Alfred: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol. 23, 1930, cl. iii, 30–50.

[34] Maus, Heinz; Fürstenberg, Friedrich (Hrsg.): *Der Positivismusstreit in der deutschen Soziologie.* Neuwied und Berlin: Luchterhand, 1971 (Soziologische Texte 58); (dritte Auflage).

[35] Odifreddi, Piergiorgio: *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Bd. 125: *Classical Recursion Theory — The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers*. Amsterdam und anderswo: Elsevier, 1989.

[36] Petersen, Uwe: Logic Without Contraction as Based on Inclusion and Unrestricted Abstraction. In: *Studia Logica* 64 (2000), S. 365–403.

[37] Petersen, Uwe: *Diagonal Method and Dialectical Logic. Tools, Materials, and Groundworks for a Logical Foundation of Dialectic and Speculative Philosophy.* Osnabrück: Der Andere Verlag, 2002.

[38] Petersen, Uwe: $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{D}_{\lambda}^{\mathrm{Z}}$ as a Basis for **PRA**. In: *Archive for Mathematical Logic* 42 (2003), S. 665–694.

[39] Petersen, Uwe: Some Additions and Corrections to *Diagonal Method and Dialectical Logic.* In: *Dilemmata. Jahrbuch der ASFPG* 1 (2006), S. 93–173.

[40] Pinkard, Terry P.: The Categorial Satisfaction of Self-Reflexive Reason. In: *Bulletin of the Hegel Society of Great Britain* 19 (1989), S. 5–17.

[41] Poincaré, Henri: Les mathématiques et la logique. In: *Revue de métaphysique et de la morale* 14 (1906), S. 294–317.

[42] Poincaré, Henri: La logique de l'infini. In: *Revue de métaphysique et de la morale* 17 (1909), S. 461–482.

[43] Quine, Willard Van O.: *Mathematical Logic.* Cambridge MA: Harvard University Press, 1951 (zweite Auflage). Erste Auflage 1940.

[44] Quine, Willard Van O.: Quantifiers and Propositional Attitudes. In: *The Journal of Philosophy* 53 (1956), S. 177–187.

[45] Quine, Willard Van O.: *Wort und Gegenstand*. Stuttgart: Philipp Reclam jun., 1980.

[46] Russell, Bertrand: *The Principles of Mathematics*. London: Allen & Unwin, 1937 (third reprint of second edition). – Orig.: Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

[47] Russell, Bertrand: Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. In: *Logic and Knowledge, Essays 1901–1950* (R. C. Marsh, Hrsg.). London: George Allen & Unwin Ltd, 1956, S. 59–102. – Orig.: *American Journal of Mathematics* 30 (1908), 222–262.

[48] Russell, Bertrand: Introduction. In: [63], 1922, S. ix–xxii.

[49] Russell, Bertrand: *Das menschliche Wissen*. Darmstadt: Holle Verlag, 1951.

[50] Schütte, Kurt: *Beweistheorie*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1960.

[51] Schütte, Kurt: *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968.

[52] Schwarz, Franz F.: *Aristoteles. Metaphysik*. Stuttgart: Philipp Reclam Jun., 1993. Erste Auflage 1970.

[53] Skirbekk, Gunnar (Hrsg.): *Wahrheitstheorien. Eine Auswahl aus den Diskussionen über Wahrheit im 20. Jahrhundert*. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1977 (suhrkamp taschenbuch wissenschaft 210).

[54] Skolem, Thoralf: Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom. In: *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 3 (1957), S. 1–17.

[55] Stegmüller, Wolfgang: *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik*. Wien und New York: Springer-Verlag, 1970 (zweite Auflage). – Erste Auflage 1957.

[56] Stegmüller, Wolfgang: *Theorie und Erfahrung,* Zweiter Halbband: *Theorienstrukturen und Theoriendynamik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1973 (Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band II).

[57] Tarski, Alfred: Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik. In: [53], S. 140–188.

[58] Thiel, Christian: Gottlob Frege: Die Abstraktion. In: Speck, Josef (Hrsg.): *Grundprobleme der großen Philosophen, Philosophie der Gegenwart,* 1. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1972, S. 9–44.

[59] Thiel, Christian: Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie. In: Kambartel, Friedrich; Mittelstrass, Jürgen (Hrsg.): *Zum normativen Fundament der Wissenschaft.* Frankfurt am Main: Athenäum-Verlag, 1973, S. 91–114.

[60] Tugendhat, Ernst: Tarskis semantische Definition der Wahrheit und ihre Stellung innerhalb der Geschichte des Wahrheitsproblems im logischen Positivismus. In: [53], S. 189–223. – Orig.: *Philosophische Rundschau* 8 (1960), 131–159.

[61] Wang, Hao: *A logical journey: from Gödel to philosophy.* Cambridge MA und London: The MIT Press, 1996.

[62] White, Richard B.: The Consistency of the Axiom of Comprehension in the Infinite-Valued Predicate Logic of Łukasiewicz. In: *Journal of Philosophical Logic* 8 (1979), S. 509–534.

[63] Wittgenstein, Ludwig: *Tractatus logico-philosophicus.* London: Routledge & Kegan Paul, 1969 (vierte Auflage).

[64] Wittgenstein, Ludwig: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (G. H. von Wright, R. Rhees, und G. E. M. Anscombe, Hrsg.). Ludwig Wittgenstein Werkausgabe Band 6. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 1984 (suhrkamp taschenbuch wissenschaft 506).